

Algebra I

27 augustus 2015

Theorie (2u)

- 1 (Schriftelijk) Formuleer en bewijs de eerste isomorfismestelling.
- 2 (Mondeling) a) Bewijs dat het aantal elementen van een eindig veld met eindige karakteristiek altijd een macht van een priemgetal is.
b) Zij $r \in \mathbb{N}_0$ en p een priemgetal. Dan bestaat er een veld met p^r elementen, namelijk een ontbindingsveld van de veelterm $x^r - x$ over $\mathbb{Z}_p$. Bewijs. [De drie puntjes moet je zelf invullen]
- 3 (Mondeling) Zij V een vectorruimte en $A : V \rightarrow V$ een lineaire transformatie. Bewijs dat $(A^*)^* = A$, waarbij A^* de toegevoegde transformatie van A is.

Bijvraagjes tijdens het mondeling gedeelte:

- Is een veld met eindige karakteristiek altijd eindig? Zo nee, geef een oneindig veld met eindige karakteristiek.
- Wat is het verband tussen volgende beweringen in een ring met eenheidselement?

$$\begin{aligned} u, v &\in R^\times \\ u \cdot v &\in R^\times \end{aligned}$$

- Wat is een unitaire/Hermitische/normale transformatie?

Oefeningen (3u)

- 1 Zij G en H groepen waarvan de ordes onderling ondeelbaar zijn. Zij A een deelgroep van $G \oplus H$.
a) Bewijs dat er deelgroepen G' van G en H' van H bestaan zodat $A = G' \oplus H'$. *Hint: de stelling van Bezout-Bachet kan handig zijn.*
b) Toon aan d.m.v. een voorbeeld dat de voorwaarde van onderlinge ondeelbaarheid belangrijk is.
- 2 Zij $R \subset S$ een ring met eenheidselement. Zijn de volgende beweringen waar of vals? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
a) Als $I \triangleleft R$ een priemideaal is, dan is $\{\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i s_i \mid r_i \in I, s_i \in S\}$ een priemideaal van S .
b) Als $J \triangleleft S$ een priemideaal is, dan is $J \cap R$ een priemideaal van R .
c) Als $J \triangleleft S$ een maximaal ideaal is, dan is $J \cap R$ een maximaal ideaal van R . *Spoiler: Deze uitspraak is fout.*
- 3 Bereken $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$. Geef een veelterm f in $\mathbb{Q}[X]$ zodat $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i\sqrt{5})$ het ontbindingsveld van f over $\mathbb{Q}$ is. *Hint: Vind een geschikt veld E zodat $\mathbb{Q} \subset E \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i\sqrt{5})$. Het kan makkelijker zijn om $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i\sqrt{5})$ in een andere vorm te schrijven.*
- 4 Zij $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ een matrix. Stel dat de Jordannorm van A^2 gegeven wordt door de volgende matrix. Wat zijn dan de mogelijke Jordannormen van A ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$