Differentiaalvergelijkingen

24 augustus 2015

Mondelinge vraag over deel 1

[Stelsel van de vorm

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

gegeven.]

1. Vind de kritieke punten.
2. Bepaal de waarde van $a \in \mathbb{R}$ zodat men in $(0,0)$ een zadelpunt krijgt, in $(1,-1)$ een onechte bron en in $(-1,-1)$ een spiraalpunt. *[De drie kritieke punten werden niet letterlijk gegeven in deze deelvraag, er werd namelijk een faseportret gegeven en je moest a bepalen zodat de berekende kritieke punten overeenkwamen in aard en in plaats met die van op het faseportret]*

Schriftelijke vraag over deel 1

Beschouw volgende differentiaalvergelijking:

$$x^2y'' + 2xy' + y' = 0$$

1. Wat is de aard van het punt $x = 0$ in deze vergelijking?
2. Er wordt gemakkelijk nagegaan dat $y = 1/x$ een oplossing is van deze vergelijking. Vind een tweede oplossing d.m.v. machtreeksen of Frobeniusreeksen.
3. Vind nog een oplossing d.m.v. orderreductie. Vergelijk met uw vorig antwoord.

Mondelinge vraag over deel 2

Deze vraag gaat over de warmtevergelijking in een inhomogeen midden. Dit betekent dat de constante $\lambda(x)$ plaatsafhankelijk is maar dat de wet van Newton blijft gelden:

$$\overrightarrow{j} = -\lambda(\overrightarrow{x})\ grad(u)$$

1. Leid af dat de vergelijking voor de temperatuur gegeven wordt door

$$\kappa\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda\Delta u -\ grad(\lambda)\ grad(u) = 0$$

2. Stel dat we op $[0,1]$ werken (1D dus). We leggen volgende randvoorwaarden op: $u(0,t) = T$ en $u(1,t) = 0$. We werken met $\lambda = 1 - \gamma^2$ waarbij $\gamma < 1$. Vind de evenwichtstemperatuur. Leg ook uit waarom $\gamma < 1$ moet zijn.

Schriftelijke vraag over deel 2

Deze vraag gaat over een Sturm-Liouvilleprobleem. Beschouw de volgende operator op functies *[uit een zekere functieruimte, die ik vergeten ben maar die niet zo belangrijk is voor het oplossen van de vragen]*:

$$Lf(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{df(x)}{dx}\right)$$

1. Wat is het scalair product bij deze operator?
2. Toon aan dat de operator symmetrisch is.
3. Zij $\mathcal{V}_n$ de verzameling van complexe veeltermen die van graad hoogstens n zijn. Toon aan dat $L\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_n$.
Besluit hieruit dat er juist één λ_n en één $f_n \in \mathcal{V}_n$ bestaan zodat $Lf_n = \lambda_n f_n$.
4. Bepaal λ_n voor elke $n \in \mathbb{N}$ en ook f_0, f_1 en f_2.