

examen klassieke

De Grote MacHerbie, halftijds fysicastudent, halftijds ridder

AB VRBE CONDITA MMDCCCLXXVIII

Introduction

1 vraag 1

Beschouw volgende Lagrangiaan¹:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} e^{q_1} \dot{q}_2^2 - V(q_1)$$

1.1 1

Wat is p_2 , het momentum van q_2 . Toon aan dat het behouden is.

1.2 2

Beschouw nu de nieuwe Lagrangiaan, met één veralgemeende coördinaat q_1 , en waarbij p_2 constant wordt gehouden. Kun je deze vinden door te substitueren uit de oorspronkelijke Lagrangiaan?

1.3 3

Beschouw nu de nieuwe Hamiltoniaan, met één veralgemeende coördinaat q_1 , en waarbij p_2 constant wordt gehouden. Kun je deze vinden door te substitueren uit de oorspronkelijke Hamiltoniaan?

2 vraag 2

[10pt]² Consider a swing attraction, where there's this big rod of length R that's attached to point A at one side, and on the other side there's a pendulum of

¹De opmerkzame lezer merkt dat de eenheden hier niet kloppen. Deze opmerkzame lezer weegt echter minder dan Van Riet kan benchen, dus is het argument ongeldig

²The considerate reader has spotted a language shift in here. This considerate reader clearly hasn't updated their Dikke Van Dale recently, using the most recent Donald Trump Update, in which a certain newly elected president of a certain nuclear superpower has bought Belgium.

length l and a point mass m at the end of the pendulum. The big rod is forced to rotate around A at angular velocity ω . The movement of the pendulum is constrained to be in the R, z plane (where the z-axis points upwards).

2.1 1

Calculate the kinetic energy of the test mass m .

2.2 2

Calculate the Lagrangian and prove there's an effective potential:

$$V_{eff} = -mL^2 \left(\frac{g}{L} \cos \phi + \omega^2 \sin \phi \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{2} \sin \phi \right) \right)$$

Give an equation for the points of equilibria³.

2.3 3

Consider the case $\omega \rightarrow 0$, what are the points of equilibrium? Are they stable?

2.4 4

[3.5pt] Consider the case $\omega \rightarrow \infty$, what are the points of equilibrium? Are they stable? *Hint (given on the exam): it might depend on the ratio $\frac{R}{L}$.*

3 vraag 3

Beschouw een emmer gevuld met het bloed van de vijanden van de Mac Herbie Klan. De emmer draait, zodat het bloed naar de buitenkant gaat.

3.1 1

Leg uit hoe je dit kwantitatief zou oplossen in hoogstens 1/3 pagina. Maak een tekening.⁴

3.2 2

Bereken de hoek tussen het bloedoppervlak en de verticale op een afstand r van het centrum van de emmer.

3.3 3

Bereken de hoogte $y(r)$ van het bloed op een afstand r van het centrum.

³for the Lord Van Riet giveth and taketh, thou shalt not have to solve this equation on the examination

⁴Je kreeg bonuspunten als het een tekening was van het vraagstuk en niet van een sneeuwman.

4 Hints

4.1 1.1

Bepaal de Lagrangiaan op basis van de Euler-Lagrange equations

4.2 2.2

Gooi alle termen die onafhankelijk zijn van $\dot{\phi}$ aan de ene kant, en de rest steek je in V_{eff} . Potentiaal is op een constante na bepaald.

4.3 2.3 & 2.4

Zie additional exercise 36

4.4 3.3

Bereken de hoek tussen de r-as en het oppervlak. Kan je deze hoek schrijven als een afgeleide?

5 Oplossingen

5.1 1

5.1.1 1.1

$$p_2 = e^{q_1} \dot{q}_2$$

5.1.2 1.2

$$L' = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} e^{-q_1} p_2^2 - V(q_1), \text{ nee}$$

5.1.3 1.3

$$H = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} e^{-q_1} p_2^2 + V(q_1), \text{ ja}$$

5.2 2

5.2.1 1

$$T = \frac{m}{2} (L^2 \dot{\phi}^2 + \omega^2 (\frac{R}{L} + \sin \phi)^2)$$

5.2.2 2

$$g \tan \phi = \omega^2 R + \omega^2 L \sin \phi$$

5.2.3 3

De Grote MacHerbie zal dit niet oplossen, daar dit te triviaal is voor Zijn Groot Vernuft. Indien u toch een antwoord wilt, zal u het moeten tekenen en proberen een potlood op zijn punt te balanceren. Daar dit niet lukt heeft u het antwoord.

5.2.4 4

$\phi = \pi/2$: altijd stabiel

$\phi = -\pi/2$: stabiel als $\frac{R}{L} < 1$, onstabiel anders.

Volgende bestaan slechts als $\frac{R}{L} < 1$:

$\phi = \text{Arcsin} \frac{R}{L}$: onstabiel

$\phi = \pi - \text{Arcsin} \frac{R}{L}$: onstabiel

5.3 3

5.3.1 1

één van de bijzondere eigenschappen van het bloedoppervlak is dat het een equipotentiaal oppervlak is⁵

⁵Ook al hebben de vijanden van de Mac Herbie Klan zéér weinig potentiaal

5.3.2 2

$$\tan \theta = \frac{g}{\omega^2 r}$$

5.3.3 3

$$y(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + y(0)$$