

## Bespreking Examen Analyse 1 (Augustus 2007)

**Vooraf:** Zoals het stilletjes aan een traditie is geworden, geef ik hier bedenkingen bij het examen van deze septemberzittijd. Ik zorg ervoor dat deze tekst op toledo komt, voor de deliberatie.

De vragen vind je achteraan. En daarna de globale uitslagen.

Eerst nog een algemene opmerking. Er waren maar heel weinig studenten aanwezig, slechts 11 van de 23 die ingeschreven waren. Ik ben van oordeel dat studenten die ingeschreven zijn en niet naar het examen komen, op voorhand moeten verwittigen.

### Vraag 1

Het antwoord op deze vraag stond min of meer in de cursus. Het is voorbeeld 2.3.i uit 'Metrische ruimten'. De rij  $(x_n)$  met  $x_n = n$  is een Cauchyrij voor de nieuwe metriek, maar niet voor de gewone metriek. Er wordt in de cursus reeds opgemerkt dat deze metriek dezelfde convergente rijen heeft als de gewone metriek (cfr. de opmerking na Definitie 2.1), maar het staat er niet bewezen. Ofwel doe je dat met ongelijkheden, maar je kan bijvoorbeeld ook zeggen dat de functie  $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$  continu is, net als de inverse functie. Let op dat je wel beide richtingen bewijst. Dit werd wel eens vergeten. Het gemiddelde op deze vraag is 2.23 op 5.

### Vraag 2

Wat kon je hier allemaal antwoorden?

Vooreerst kun je uitleggen dat je vertrekt van een metrische ruimte  $X$ , een deelverzameling  $E$  van  $X$  en dan de metriek op  $X$  beperkt tot de deelverzameling  $E$ . Op die manier heb je naast de oorspronkelijke metrische ruimte  $X$ , ook nog de nieuwe metrische ruimte  $E$ . Een deelverzameling  $A$  van  $E$  kun je dus bekijken in de twee metrische ruimten, in  $X$  en in  $E$ . In het eerste geval heb je het begrip *open* (in  $X$ ) en in het tweede het begrip *open in*  $E$ .

Vervolgens kun je de eigenschap formuleren: Een deelverzameling  $A$  van  $E$  is open in  $E$  enkel en alleen als er een open  $V$  in  $X$  bestaat zodat  $A = E \cap V$ . Dan kun je hieruit een paar gevolgen halen. Indien bijvoorbeeld  $E$  reeds open is in  $X$ , dan zal een deel  $A$  van  $E$  open zijn in  $E$  enkel en alleen als  $A$  open is (in  $X$ ). In elk geval zal  $A$  open zijn in  $E$  indien reeds  $A$  open is in  $X$ . Het omgekeerde is echter niet waar.

En dan geef je wat voorbeelden. Je neemt zeker een voorbeeld om dit laatste te illustreren. Er staan zo voorbeelden in de nota's. Neem bijvoorbeeld  $\mathbb{R}$  met de gewone metriek voor  $X$ , neem  $E = [0, 2[$  en  $A = [0, 1[$ . Dan is  $A$  open in  $E$  omdat bijvoorbeeld  $A = E \cap ]-1, 1]$ . Het gemiddelde op deze vraag is 2.45.

### Vraag 3

Het betreft hier een opgave uit de cursusnota's, namelijk opgave 6.6 uit 'Metrische ruimten'. De oplossing was te vinden op de examenwiki van Wina. Toch werd hier over het algemeen niet goed op geantwoord.

Neem eerst  $f$  continu. Om te bewijzen dat  $G(f)$  gesloten is moet je vertrekken met een convergente rij in  $G(f)$  en moet je bewijzen dat de limiet weer in  $G(f)$  zit. Zo'n rij heeft de vorm  $((x_n, y_n))_n$  waarbij dus  $x_n \in \mathbb{R}$  en  $y_n = f(x_n)$  voor elke  $n$ . De limiet heeft de vorm  $(x, y)$  met  $x, y \in \mathbb{R}$ . Omdat  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$  zal  $x_n \rightarrow x$  en  $y_n \rightarrow y$ . Omdat  $f$  continu is in  $x$  volgt dat ook  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Omdat de limiet enig is moet  $y = f(x)$ . Dus is  $(x, y) \in G(f)$ . Dit toont aan dat  $G(f)$  gesloten is.

Veel studenten maken hier de fout door te vertrekken met een convergente rij  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$ .

Het omgekeerde is niet waar. Het voorbeeld op het winaweb is goed. Definieer  $f(x) = \frac{1}{x}$  als  $x \neq 0$  en  $f(0) = 0$ . Deze functie is niet continu, maar de grafiek is wel gesloten. Je moest dit laatste ook wel wat argumenteren, al was het maar door een goede tekening te maken.

Het gemiddelde is 1.5.

#### Vraag 4

Deze vraag was niet zo moeilijk. Je bewijst twee richtingen. Wanneer je vertrekt met het gegeven dat  $f$  totaal afleidbaar is, mag je wel nog niet schrijven dat  $df(a)(t) = (f'_1(a)t, \dots, f'_q(a)t)$ . Je weet immers nog niet of de coördinaatfuncties wel differentieerbaar zijn. In de andere richting mag je niet vergeten dat je aanvankelijk voor elke  $k$  een  $\delta_k$  krijgt en dat je dan  $\delta$  gelijk neemt aan het minimum van al deze  $\delta_k$ . Het gemiddelde is 2.41.

#### Vraag 5

Dit is een opgave die aan bod is gekomen tijdens de les, in de periode dat ik afwezig was (cfr. werktekst over extreme waarden). Een mogelijke kromme is  $x \rightarrow (x, ax^2)$  met  $1 < a < 2$ . Deze kromme ligt tussen de grafiek van de twee parabolen en dat is een gebied waar  $f$  negatief is. Je krijgt op die manier een differentieerbare kromme waar  $f$  een lokaal maximum heeft in  $(0, 0)$ . Wanneer je een kromme kiest die in de oorsprong voldoende glad is en die aan een kant tussen de twee parabolen ligt en aan de andere kant er boven of er onder, dan krijg je zelfs een functie die geen extreme waarde heeft in de oorsprong. Je kon dit best illustreren met een figuur. Gemiddelde: 1.45.

#### Vraag 6

Deze vraag was nogal gemakkelijk. Je wil Propositie 3.4 toepassen op de functie  $FG : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ze is continu op het gesloten interval als product van continue functies en ze is differentieerbaar op het open interval als product van differentieerbare functies. De afgeleide is  $Fg + fG$  en deze functie is zelf ook gedefinieerd en continu op het gesloten interval, dus ook integreerbaar. Bijgevolg kan de propositie toegepast worden en dit geeft de gevraagde formule. Gemiddelde 4.27.

#### Vraag 7

Het antwoord op deze vraag verschilt niet zo veel van de redenering in het bewijs van Propositie 4.6 uit 'Speciale functies'. Ik mocht dan wel verwachten dat het argument volledig uitgewerkt is. Het gebruik van Propositie 4.6 uit 'Integratietheorie' is niet helemaal evident omdat we hier te maken hebben met een complexe functie en in die andere propositie met reële functies. Je kon bijvoorbeeld argumenteren dat het reëel en imaginair deel van de complexe functie ook nog gedomineerd blijven en dan deze Propositie 4.6 toepassen op dat reëel en imaginair deel. Gemiddelde: 3.0.

**Besluit:**

Van de 11 studenten die zijn komen opdagen, zijn er 7 geslaagd. Het gemiddelde is 10.3 op 20.

De twee vragen waar het slechtst op gescoord werd, namelijk vraag 3 en vraag 5 zijn toch vragen waar je op voorbereid kon zijn. De eerste is een opgave uit de nota's, met een antwoord op het winaweb! In het tweede geval gaat het over iets dat heel expliciet in de les is aan bod gekomen.

Augustus 2007

- (1) Geef een voorbeeld van een metriek  $d$  op  $\mathbb{R}$  zodat aan de volgende twee voorwaarden voldaan is:
  - i) een rij  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  convergeert voor de metriek  $d$  enkel en alleen indien de rij gewoon convergeert,
  - ii) er bestaat een rij  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  die een Cauchyrij is voor  $d$  maar niet voor de gewone metriek.Argumenteer correct en volledig, maar toch beknopt.
- (2) Zij  $E$  een deelverzameling van een metrische ruimte  $X$ . Bij de studie van het begrip 'samenhangend' in het deeltje over metrische ruimten, maken we een onderscheid tussen *open in  $E$*  en (gewoon) *open*. Bespreek en illustreer met voorbeelden.
- (3) Beschouw  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$  met de gewone metriek. Definieer voor een functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de grafiek  $G(f)$  als de verzameling van elementen  $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$  met  $x \in \mathbb{R}$ . Toon aan dat  $G(f)$  gesloten is indien  $f$  continu is. Is het omgekeerde waar?
- (4) Vervolledig het bewijs van Propositie 2.5 uit 'Afgeleiden II'.
- (5) Beschouw de functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeven door  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ . Wanneer je  $f$  beperkt tot een willekeurige rechte die door de oorsprong gaat, dan zal die beperking in  $(0, 0)$  een lokaal minimum hebben. Kun je een (gladde) kromme vinden die ook door de oorsprong gaat, maar zodat  $f$  beperkt tot die kromme in  $(0, 0)$ , geen lokaal minimum heeft? M.a.w. bestaat er een differentieerbare functie  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  zodat  $g(0) = (0, 0)$  en zodat de samenstelling  $f \circ g$  geen lokaal minimum heeft in 0? Bespreek.
- (6) Werk het bewijs van Propositie 3.5 uit 'Integratietheorie' nauwkeurig uit. Vermeld goed welke eigenschappen je allemaal gebruikt en argumenteer dat telkens de voorwaarden voldaan zijn. Probeer toch beknopt te antwoorden.
- (7) In Propositie 4.6 uit 'Speciale functies' tonen we aan dat de  $\Gamma$ -functie uitgebreid kan worden tot complexe getallen  $z$  met  $\operatorname{Re} z > 0$ . Kun je op een *analoge* manier ook de  $B$ -functie uitbreiden? Je mag hierbij dus geen gebruik maken van de formules in Propositie 4.12.

Veel geluk

**Puntenverdeling:**

|    |    |
|----|----|
| 20 |    |
| 19 |    |
| 18 |    |
| 17 |    |
| 16 |    |
| 15 | xx |
| 14 | x  |
| 13 |    |
| 12 | xx |
| 11 | x  |
| 10 | x  |
| 9  |    |
| 8  | x  |
| 7  | x  |
| 6  |    |
| 5  | xx |
| 4  |    |
| 3  |    |
| 2  |    |
| 1  |    |
| 0  |    |