

Examen CPN (modelling met schriftelijke voorbereiding)

10/06/2013 (groep om 8u)

Vul eerst deze vraag in. Je krijgt een uur de tijd, waarna de examinerator de antwoordbladen zal komen ophalen. Schrijf alles uit zoals je ook zou doen op een echt schriftelijk examen.

1. Bespreek volgende methodes voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen: voorwaartse Euler, achterwaartse Euler en trapeziumregel. Gebruik zeker de begrippen expliciet, impliciet, orde en stabiliteit.

Wat zijn stijve differentiaalvergelijkingen en welke van de bovenstaande methodes kan je hierop toepassen?

2. Waarom speelt variantie een belangrijke rol bij Monte-Carlo? Welke technieken hebben we in de cursus gezien om hiermee om te gaan?
3. De volgende opgave moet opgelost worden in Matlab. Genereer eerst de 10×10 -matrix A met willekeurige elementen, normaalverdeeld met gemiddelde 0 en variantie 1. Bereken dan A^{-1} , zonder de commando's 'inv', '\', '/', '^ -1' of enige ander Matlab bevel dat direct de inverse uitrekent. Vorm daarna een Hilbertmatrix B en pas dezelfde methode toe. Bereken dan ook $A * A^{-1}$ en $B * B^{-1}$ om te verifiëren dat dit wel degelijk de eenheidsmatrix oplevert. Welke matrix heeft de grootste fout en verklaar ook waarom?

Tip 1: Op Toledo staat er een script vsubs.m. Je kan deze functie of een methode erop geïnspireerd benutten.

Tip 2: Het matrixproduct $M * M^{-1}$ komt hier overeen met het oplossen van een 10-voudig stelsel.

4. Deze vraag dient met Maple opgelost te worden. In de kwantummechanica beschrijft de Schrödnigervergelijking een systeem. Formule (1) toont de vergelijking voor een waterstofatoom na scheiding van veranderlijken met r de afstand van het elektron tot de kern en l een getal dat het baanimpulsmoment aanduidt.

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R(r) + 2r \frac{d}{dr} R(r) + (r^2 k^2 - l(l+1)) R(r) = 0 \quad (1)$$

De functies j_0 en j_1 stellen de Besselfunctie voor van respectievelijk de nulde en de eerste orde. Gegeven de beginvoorwaarden $R(0) = 0$ en $\frac{d}{dx}R(0) = 1$, ga na dat j_0 inderdaad een oplossing is van deze Schrödingervergelijking.

$$j_0 = \frac{\sin(x)}{x} \quad (2)$$

$$j_1 = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \quad (3)$$

Uitgaande van j_0 en j_1 kunnen we de volgende Besselfuncties vinden via

$$j_{l+1}(x) + j_{l-1}(x) = \frac{2l+1}{x} j_l(x) \quad (4)$$

Implementeer nu voorwaartse recursie om de reeks $j_2, j_3, \dots$ tot en met j_{10} uit te rekenen voor de x -waarde 1,5. Zet ook de fout uit tegenover de werkelijke waarden. Maak daarbij gebruik van het Maple commando 'BesselJ' voor het exacte resultaat. Verklaar waarom voorwaartse recursie geen goeie keus is.

Om dit probleem aan te pakken, kunnen we ook eens met achterwaartse recursie proberen. Start hiervoor bij $j_{20} = 0$ en $j_{19} = \delta$ met δ een willekeurig kleine waarde (je moet dus zelf bepalen wat klein is). Omwille van deze startwaarden moet er nog een normalisatie uitgevoerd worden. Die is hetzelfde voor iedere gegenereerd getal en kan gevonden worden met behulp van de vergelijking

$$(j_0(x) - j_1(x)x) \cos(x) + j_0(x)x \sin(x) = 1 \quad (5)$$

Vervolledig hiermee opnieuw de reeks en zet weer de fout uit van j_0 tot en met j_{10} . Overtuig uzelf ervan dat de achterwaartse benadering beter is.