E Oude examenvragen

Oefening E.1 (januari 2010)**.** Definieer de deelvectorruimte $K \subset \ell^2(\mathbb{N})$ als

$$K := \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x(2n+1) = x(2n) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Noteer met p_K de orthogonale projectie van $\ell^2(\mathbb{N})$ op K. Bepaal $(p_K(x))(2n)$ voor willekeurige $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs je formule.

Oefening E.2 (februari 2012)**.** Zij $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ kwadratisch integreerbare functies. Toon aan dat

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f * g)(x) = 0.$$

Hint. Laat je inspireren door het bewijs van de continuïteit van $f * g$.

Oefening E.3 (februari 2012)**.** Definieer $K \subset L^2(\mathbb{R})$ gegeven door

$$K = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(-x) = 2f(x) \text{ voor bijna alle } x \geq 0\}.$$

a) Geef een expliciete uitdrukking voor $K^\perp$ en bewijs deze uitdrukking.

b) Geef een expliciete formule voor de orthogonale projectie $p_K(f)$ van $f \in L^2(\mathbb{R})$ op K. Bewijs deze formule.

Oefening E.4 (augustus 2013)**.** Beschouw de vectorruimte $C([0,1])$ van continue functies van het interval $[0,1]$ naar $\mathbb{C}$. Definieer op deze vectorruimte de norm

$$\|f\| = \left(\int_0^1 x|f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Welke lineaire combinatie van de functies $F : x \mapsto 1$ en $G : x \mapsto x$ ligt zo dicht mogelijk bij de functie $H : x \mapsto x^2$? Bewijs je antwoord nauwkeurig.

Oefening E.5 (september 2013)**.** Beschouw $L^2([0, 2\pi])$ met de norm

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bereken de norm van de lineaire afbeelding

$$\omega : L^2([0, 2\pi]) \to \mathbb{C} : \omega(f) = \hat{f}(0) - \hat{f}(1).$$

We noteren hier met $\hat{f}(0)$ en $\hat{f}(1)$ de 0de en 1ste Fouriercoëfficiënt van f.
Bewijs je antwoord nauwkeurig.