Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor of Science Fysica en Wiskunde

vrijdag 3 februari 2012, 8:30–12:30

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt	(d) 2 pt
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt	
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt	
Vraag 4:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 3 pt	
Vraag 5:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt	

- Succes!

Vraag 1 (a) Schrijf de bewering dat de functie $f : X \to Y$ niet inverteerbaar is met behulp van kwantoren zonder de negatie $\neg$ te gebruiken. U mag $\neq$ wel gebruiken.

Zijn de volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar? Licht uw antwoord steeds toe. [Een formeel bewijs wordt niet gevraagd.]

(b) De verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ van irrationale getallen.

(c) De verzameling van alle rijen (a_n) met $a_n \in \{0, 1\}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(d) De verzameling van alle rijen (a_n) met $a_n \in \mathbb{N}$ en $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Antwoord 1 (a) f is niet inverteerbaar als en slechts als f geen inverse heeft. In kwantoren uitgedrukt betekent dit

$$\forall g : Y \to X : (g \circ f \neq I_X \ \vee \ g \circ f \neq I_Y)$$

Niet inverteerbaar is hetzelfde als niet bijectief, hetgeen in kwantoren uitgeschreven betekent dat

$$(\exists y \in Y : \forall x \in X : \ f(x) \neq y) \ \vee \ (\exists x_1 \in X : \exists x_2 \in X : \ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2))$$

Voor het uitschrijven van niet bijectief, i.p.v. niet inverteerbaar, werd 0,5 punt afgetrokken.

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is overaftelbaar.

Immers, $\mathbb{Q}$ is aftelbaar. Als $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aftelbaar zou zijn, dan is de unie $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ook aftelbaar. Maar deze unie is $\mathbb{R}$ en we weten dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is.

(c) Deze verzameling is overaftelbaar. Er is een bijectie met $P(\mathbb{N})$ gegeven door

$$(a_n) \mapsto \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}$$

en van $P(\mathbb{N})$ weten we dat het overaftelbaar is.

Je kunt het ook inzien met een diagonaalargument.

(d) Deze verzameling is aftelbaar oneindig.

Je moet inzien dat een dalende rij van natuurlijke getallen op den duur constant is. Er is dus een $N \in \mathbb{N}$ met $a_n = a_N$ voor alle $n \geq N$.

Zij X_N de verzameling van alle dalende rijen van natuurlijke getallen die constant zijn vanaf index N. Een rij (a_n) in X_N wordt bepaald door de waarden $a_0, \ldots, a_N$. Dit zijn natuurlijke getallen. Dus we kunnen X_N zien als een deelverzameling van $\mathbb{N}^{N+1}$. Deze laatste verzameling is aftelbaar oneindig en dus is ook elke X_N aftelbaar oneindig. Dan is ook

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N$$

aftelbaar oneindig (omdat het een aftelbare unie is van aftelbare verzamelingen).

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen A en B van Y geldt dat
$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat
$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \quad \Rightarrow \quad A \subset B \tag{1}$$
niet hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat de implicatie (1) geldt voor alle $A \in P(Y)$ en $B \in P(Y)$ als en slechts als f surjectief is.

Antwoord 2 Natuurlijk moet je weten dat
$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$
anders kun je geen punten krijgen voor deze vraag. Verder moet je het bewijs systematisch aanpakken.

(a) We moeten een implicatie bewijzen. Dus we beginnen met te veronderstellen dat $A \subset B$. Om de inclusie $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ te bewijzen, nemen we een willekeurige $x \in f^{-1}(A)$. Dan is $f(x) \in A$. Omdat $A \subset B$ is dan ook $f(x) \in B$ en dit betekent precies dat $x \in f^{-1}(B)$. Hieruit volgt dat $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ en de implicatie uit (a) is bewezen.

(b) Uit onderdeel (c) blijkt dat je voor een tegenvoorbeeld moet denken aan een functie die niet surjectief is. Neem bv. $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$ en $f : X \to Y$ de functie met $f(1) = 2$. Als nu $A = \{2, 3\}$ en $B = \{2\}$, dan is $f^{-1}(A) = f^{-1}(B) = \{1\}$, zodat de inclusie $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ geldt. De inclusie $A \subset B$ geldt evenwel niet, zodat de implicatie (1) niet juist is.

(c) Neem aan dat $f : X \to Y$ niet surjectief is. Dan is er een $y^* \in Y \setminus f(X)$. Neem nu $A = \{y^*\}$ en $B = \emptyset$. Dan geldt $f^{-1}(A) = f^{-1}(B) = \emptyset$ maar $A \subset B$ geldt niet. Dus (1) geldt niet. Bewezen is nu dat
$$f \text{ is niet surjectief} \;\Rightarrow\; \neg \big(\forall A, B \in P(Y) : \; f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \Rightarrow A \subset B\big)$$
Met contrapositie volgt hieruit
$$\big(\forall A, B \in P(Y) : \; f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \Rightarrow A \subset B\big) \;\Rightarrow\; f \text{ is surjectief}$$
Om de andere implicatie te bewijzen, nemen we aan dat f surjectief is. Zij $A, B \in P(Y)$ met $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Neem $y \in A$ willekeurig. Omdat f surjectief is, is er een $x \in X$ met $f(x) = y$. Dan is $f(x) \in A$, zodat $x \in f^{-1}(A)$. Omdat $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ is dan ook $x \in f^{-1}(B)$ en dit betekent $f(x) \in B$. Omdat $y = f(x)$ is dus $y \in B$. Hiermee is bewezen dat $A \subset B$. De implicatie
$$f \text{ is surjectief} \;\Rightarrow\; \big(\forall A, B \in P(Y) : \; f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \Rightarrow A \subset B\big)$$
is nu ook bewezen.

Vraag 3 Zij X een verzameling. We noteren met $\mathrm{Fun}(X)$ de verzameling van alle functies $f : X \to X$. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X)$ gegeven door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er een bijectieve functie $\sigma : X \to X$ bestaat met $\sigma \circ f = g \circ \sigma$.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Neem aan dat X eindig is en dat $(f, g) \in R$. Bewijs dat f en g evenveel vaste punten hebben.

[N.B.: $x \in X$ is een vast punt van f als en slechts als $f(x) = x$.]

(c) Hoeveel equivalentieklassen zijn er in het geval dat $|X| = 2$? Beschrijf elke equivalentieklasse.

Antwoord 3 (a) We moeten bewijzen dat R reflexief, symmetrisch en transitief is.

Zij $f \in \mathrm{Fun}(X)$. De eenheidsfunctie I_X is een bijectie van X naar X en er geldt $I_X \circ f = f$ en $f \circ I_X = f$. Er is dus een bijectie σ (namelijk $\sigma = I_X$) met $\sigma \circ f = f \circ \sigma$. We concluderen dat $(f, f) \in R$ en dus is R reflexief.

Zij $f, g \in \mathrm{Fun}(X)$ met $(f, g) \in R$. Er is dus een bijectie σ met $\sigma \circ f = g \circ \sigma$. Dan is σ^{-1} ook een bijectie. Dan geldt

$$\sigma^{-1} \circ (\sigma \circ f) \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ (g \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}.$$

We gebruiken nu de associativiteit van het samenstellen van functies, en ook dat $\sigma \circ \sigma^{-1} = I_X$ en $\sigma^{-1} \circ \sigma = I_X$ om te concluderen dat

$$\sigma^{-1} \circ g = f \circ \sigma^{-1}.$$

Hieruit volgt dat $(g, f) \in R$ en dus is R symmetrisch.

Veronderstel dat $f, g, h \in \mathrm{Fun}(X)$ met $(f, g) \in R$ en $(g, h) \in R$. Dan zijn er bijecties σ_1 en σ_2 van X naar X met $\sigma_1 \circ f = g \circ \sigma_1$ en $\sigma_2 \circ g = h \circ \sigma_2$. [Opmerking: σ_1 en σ_2 zijn in het algemeen niet hetzelfde! Dit werd wel eens fout gedaan.] Dan is $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ ook een bijectie van X naar X en er geldt

$$\sigma \circ f = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ f = \sigma_2 \circ g \circ \sigma_1 = h \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = h \circ \sigma$$

waarbij we een aantal keren de associativiteit van de samenstelling gebruiken. Uit $\sigma \circ f = h \circ \sigma$ volgt dat $(f, h) \in R$. Dit bewijst dat R transitief is.

(b) Neem aan dat $(f, g) \in R$. Er is dan een bijectie σ met $\sigma \circ f = g \circ \sigma$.

Het gaat er nu om dat je het volgende inziet.

Lemma: Als x een vast punt is van f dan is $\sigma(x)$ een vast punt van g.

Voor elke $x \in X$ geldt namelijk $g(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$. Als $f(x) = x$, dan geldt dus $g(\sigma(x)) = \sigma(x)$ en $\sigma(x)$ is inderdaad een vast punt van g.

Als nu $x_1, \ldots, x_n$ de vaste punten van f zijn, dan volgt vanwege het lemma dat $\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)$ vaste punten van g zijn. Omdat σ een bijectie is, zijn dit n verschillende elementen van X, zodat g minstens n vaste punten heeft.

Bijgevolg is het aantal vaste punten van f kleiner dan of gelijk aan het aantal vaste punten van g. Dit geldt steeds als $(f, g) \in R$. Vanwege het symmetrisch zijn van R is ook $(g, f) \in R$, zodat tevens het aantal vaste punten van g kleiner dan of gelijk is aan het aantal vaste punten van f.

Het aantal vaste punten van f is dus gelijk aan het aantal vaste punten van g.

(c) Als $|X| = 2$ dan $|\operatorname{Fun}(X)| = 4$. Neem $X = \{1, 2\}$. De vier functies in $\operatorname{Fun}(X)$ zijn dan f_1, f_2, f_3, f_4 met

$$\begin{array}{llll} f_1(1) = 1, & f_2(1) = 1, & f_3(1) = 2, & f_4(1) = 2, \\ f_1(2) = 2. & f_2(2) = 1, & f_3(2) = 2, & f_4(2) = 1. \end{array}$$

f_1 heeft twee vaste punten, f_2 en f_3 hebben één vast punt, en f_4 heeft geen vaste punten. Uit onderdeel (b) volgt dan dat zowel f_1 als f_4 met geen van de andere functies equivalent kan zijn. Zij vormen dus elk een eigen equivalentieklasse. Op grond van (b) zouden f_2 en f_3 equivalent kunnen zijn. Inderdaad geldt $\sigma \circ f_2 = f_3 \circ \sigma$ met $\sigma = f_4$ (merk op f_4 is een bijectie). Er zijn dus drie equivalentieklassen namelijk

$$\{f_1\}, \quad \{f_2, f_3\}, \quad \text{en} \quad \{f_4\}.$$

[Het is ook mogelijk om dit in te zien zonder (b) te gebruiken.]

Vraag 4 De rij (a_n) is gedefinieerd door $a_0 = 0$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat de rij (a_n) strikt stijgend is.

(b) Bewijs dat de rij naar boven begrensd is.

(c) Bewijs dat de rij convergent is en bereken de limiet.

Antwoord 4 (a) We gaan bewijzen dat $a_n < a_{n+1}$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$. [Als je deze opmerking vergeet, kost je dat 1 punt.]

Basisstap: Er geldt $a_0 = 0$ en $a_1 = \sqrt{3}$. Dus $a_0 < a_1$ en de bewering klopt voor $n = 0$.

Inductiestap: Neem aan dat voor zekere $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $a_k < a_{k+1}$. Dan geldt ook $3 + 2a_k < 3 + 2a_{k+1}$. We kunnen nu ook de vierkantswortel nemen (want het gaat om positieve getallen) en de ongelijkheid blijft behouden. Dus $\sqrt{3 + 2a_k} < \sqrt{3 + 2a_{k+1}}$. Uit de recursieve definitie van de rij (a_n) volgt dat $a_{k+1} < a_{k+2}$.

Conclusie: De ongelijkheid $a_n < a_{n+1}$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ vanwege het principe van volledige inductie. De rij is bijgevolg strikt stijgend.

(b) We bewijzen dat $a_n < 11$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dit doen we weer met inductie. [In plaats van 11 hadden we ook een ander getal ≥ 3 kunnen nemen.]

Basisstap: Er geldt $a_0 = 0 < 11$. De bewering klopt dus voor $n = 0$.

Inductiestap: Neem aan dat voor zekere $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $a_k < 11$. Dan is $3 + 2a_k < 3 + 2 \cdot 11 = 25$, zodat $\sqrt{3 + 2a_k} < \sqrt{25} = 5 < 11$. Uit de definitie van de rij (a_n) volgt dan dat $a_{k+1} < 11$.

Conclusie: Vanwege het principe van volledige inductie geldt de ongelijkheid $a_n < 11$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$. De rij (a_n) is dus naar boven begrensd.

Een andere manier om (b) te bewijzen gaat als volgt: Uit (a) volgt dat $a_n < a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Na kwadratering volgt dat $a_n^2 < 3 + 2a_n$ (want het gaat om positieve getallen), ofwel $a_n^2 - 2a_n - 3 < 0$. Dit betekent $(a_n - 3)(a_n + 1) < 0$. Omdat zeker $a_n + 1 > 0$ volgt dat $a_n - 3 < 0$ en dus $a_n < 3$. Bijgevolg is de rij (a_n) naar boven begrensd door 3.

(c) We weten dat een stijgende rij die naar boven begrensd is, convergeert. Uit (a) en (b) volgt bijgevolg dat (a_n) convergent is.

Zij L de limiet van (a_n). Er geldt dat $a_{n+1}^2 = 3 + 2a_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Gebruik makend van de rekenregels van limieten kunnen we nu concluderen dat $L^2 = 3 + 2L$.

Dit betekent $L = 3$ of $L = -1$. De mogelijkheid $L = -1$ vervalt omdat de rij uit positieve getallen bestaat. Dus $L = 3$.

[Je kunt de rekenregels voor limieten voor convergente rijen niet toepassen op de gelijkheid $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$ vanwege de vierkantswortel in het rechterlid. Het kost je 0,5 punt, als je dit toch doet. Je had wel kunnen verwijzen naar het resultaat van Oefening 10.4.6.]

Een alternatief voor (c) is om gebruik te maken van de contractiestelling. Merk op dat $a_{n+1} = F(a_n)$, waarbij de functie F gedefinieerd is door

$$F : [0, 3] \to [0, 3] : x \mapsto F(x) = \sqrt{3 + 2x}.$$

Er geldt $F(0) = \sqrt{3}$ en $F(3) = 3$. Omdat F een stijgende functie is, geldt inderdaad dat $F(x) \in [0, 3]$ voor elke $x \in [0, 3]$ en bijgevolg is F goed gedefinieerd.

Vanwege de worteltruc geldt

$$F(x) - F(y) = \sqrt{3 + 2x} - \sqrt{3 + 2y} = \frac{2y - 2x}{\sqrt{3 + 2x} + \sqrt{3 + 2y}}.$$

Voor $x, y \in [0, 3]$ geldt $\sqrt{3 + 2x} + \sqrt{3 + 2y} \geq 2\sqrt{3}$. Bijgevolg is

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{|2y - 2x|}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}|x - y|.$$

Omdat $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, volgt hieruit dat F een contractie is.

Uit de contractiestelling volgt nu dat de rij (a_n) convergeert naar het vaste punt van F. Omdat $F(3) = 3$ is 3 het vaste punt van F en 3 is bijgevolg de limiet van (a_n).

Vraag 5 Neem aan dat (a_n) en (b_n) twee reële rijen zijn en defineer

$$c_n = \max\{a_n, b_n\}, \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}$$

(a) Neem aan dat (a_n) en (b_n) convergente rijen zijn. Bewijs dat (c_n) dan ook een convergente rij is en dat

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\}.$$

(b) Neem aan dat (a_n) en (b_n) begrensde rijen zijn (niet noodzakelijk convergent). Geldt dan de volgende gelijkheid:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \max\{\limsup_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} b_n\} \quad ?$$

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Dezelfde vraag als in (b) voor de gelijkheid

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \max\{\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n\}$$

Antwoord 5 (a) Zij $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ en $M = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Eerste manier: Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er is een $n_1 \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_n - L| < \varepsilon$ geldt voor alle $n \geq n_1$. Er is een $n_2 \in \mathbb{N}$ zo dat $|b_n - M| < \varepsilon$ geldt voor alle $n \geq n_2$. Neem $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ en zij $n \geq n_0$. Dan geldt zowel $|a_n - L| < \varepsilon$ als $|b_n - M| < \varepsilon$. Dus

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \text{en} \quad M - \varepsilon < b_n < M + \varepsilon.$$

Dan is het eenvoudig in te zien dat

$$\max\{L - \varepsilon, M - \varepsilon\} < \max\{a_n, b_n\} = c_n < \max\{L + \varepsilon, M + \varepsilon\}.$$

Dit betekent

$$\max\{L, M\} - \varepsilon < c_n < \max\{L, M\} + \varepsilon$$

en dus

$$|c_n - \max\{L, M\}| < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat de rij (c_n) convergent is met $\max\{L, M\}$ als limiet.

Tweede manier: Maak onderscheid naar de gevallen $L > M$, $L < M$ en $L = M$.

Geval $L > M$. Als $L > M$ dan is de limiet van de rij (a_n) strikt groter dan die van de rij (b_n). Er is dan een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $a_n > b_n$ voor alle $n \geq n_0$. Voor $n \geq n_0$ is dan $c_n = a_n$. Omdat het beginstuk van de rij niet uitmaakt voor de limiet, is dan ook (c_n) convergent met

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Geval $L < M$. Dit geval is analoog. In dit geval convergeert de rij (c_n) naar M.

Geval $L = M$. Neem $\varepsilon > 0$. Er is dan een $n_1 \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_n - L| < \varepsilon$ geldt voor alle $n \geq n_1$. Er is ook een $n_2 \in \mathbb{N}$ zo dat $|b_n - L| < \varepsilon$ geldt voor alle $n \geq n_2$. Neem $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ en zij $n \geq n_0$. Dan geldt zowel $|a_n - L| < \varepsilon$ als $|b_n - L| < \varepsilon$. Omdat $c_n = a_n$ of $c_n = b_n$, geldt zeker $|c_n - L| < \varepsilon$. Dit betekent dat de rij (c_n) convergeert naar L.

In alle gevallen is de rij (c_n) convergent met $\max\{L, M\}$ als limiet.

(b) De gelijkheid met de limsup geldt. Om dit te bewijzen nemen we

$$L = \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad M = \limsup_{n\to\infty} b_n$$

en we laten zien dat

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : c_n < \max\{L, M\} + \varepsilon \tag{2}$$

en

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : c_n > \max\{L, M\} - \varepsilon. \tag{3}$$

Uit (2)-(3) volgt namelijk dat $\limsup_{n\to\infty} c_n = \max\{L, M\}$ vanwege de karakterisatie van limsup.

Bewijs van (2): Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vanwege de eigenschappen van limsup is er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zo dat $a_n < L + \varepsilon$ en $b_n < M + \varepsilon$ gelden voor alle $n \geq n_0$. Dan is zeker

$$a_n < \max\{L, M\} + \varepsilon \quad \text{en} \quad b_n < \max\{L, M\} + \varepsilon$$

en dan ook

$$c_n = \max\{a_n, b_n\} < \max\{L, M\} + \varepsilon.$$

Bewijs van (3): Kies $\varepsilon > 0$ en $n_0 \in \mathbb{N}_0$ willekeurig. We mogen aannemen dat $L \geq M$ (het geval $M \geq L$ gaat analoog). Omdat $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$ is er een $n \geq n_0$ met $a_n > L - \varepsilon$. Omdat $c_n = \max\{a_n, b_n\} \geq a_n$ volgt dan ook $c_n > L - \varepsilon$. Vanwege de aanname dat $L \geq M$ betekent dit dat $c_n > \max\{L, M\} - \varepsilon$.

(c) De bewering klopt niet.

Neem bijvoorbeeld $a_n = (-1)^n$ en $b_n = (-1)^{n+1}$. De twee rijen (a_n) en (b_n) zijn begrensd met

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = -1.$$

Verder is $c_n = \max\{1, -1\} = 1$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, zodat

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = 1.$$

Het is dan duidelijk dat de gelijkheid

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \max\{\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n\}$$

niet geldt, want de linkerkant is 1 en de rechterkant is -1.