

Samenvatting Grafentheorie

4.2 Grafen

4.2.1 Grafen



Graaf (V, E, ϕ)

- V : verzameling van knopen in de graaf (niet leeg)
- E : verzameling van bogen in de graaf
- $\phi : E \rightarrow M_2(V)$: een afbeelding (dus elke boog E heeft een beeld) die elke boog met twee knopen associeert



Graaf (V, E) (vereenvoudigde definitie)

- V : verzameling van knopen in de graaf (niet leeg)
- $E \rightarrow M_2(V)$: een multiverzameling van multiparen uit V

Eigenschappen van grafen

- $|V| = \frac{\sum_{v \in V} \delta(v)}{2}$ Het aantal bogen in een graaf is de helft van de som van de graden van die graaf
- De som van de graden in een graaf is altijd even
- Het aantal knopen met een oneven graad in een graaf is altijd even



Samenhangende graaf

Een graaf is samenhangend $\Leftrightarrow$ er bestaat een pad tussen elk paar knopen van de graaf

4.2.2 Paden



Pad

Een pad is een graaf $G(V, E)$ is een rij bogen van de vorm $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$, waarbij $\forall i : (v_i, v_{i+1}) \in E$ wordt ook genoteerd als $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$



Enkelvoudig pad $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$



Kring een pad $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ waarvoor alle **bogen** verschillend zijn en waarvoor $v_0 = v_n$



Enkelvoudige kring ook alle knopen verschillend buiten $v_0 = v_n$



Hamiltoniaans pad

Een Hamiltoniaans pad van de graaf G is een pad waarin elke knoop **precies** één keer voorkomt.



Hamiltoniaanse kring Een enkelvoudige kring waarin elke knoop van G precies één keer in voorkomt



Euleriaans pad

Een Euleriaans pad van de graaf G is een pad waarin elke knoop **minstens** één keer, en elke boog van G **precies** één keer in voorkomt



Euleriaanse kring een Euleriaans pad dat ook een kring is

Eigenschappen

- Een lus telt als een kring met lengte 1
- Als je op je tekening een kring hebt met n bogen dan zijn er $n!$ kringen (de volgorde van de bogen)
- Een graaf G heeft een Euleriaans pad $\Leftrightarrow$ de graaf is samenhangend en heeft hoogstens 2 knopen met een oneven graad
- Een graaf G heeft een Euleriaanse kring $\Leftrightarrow$ de graaf is samenhangend en elke knoop heeft een even graad

4.2.3 Deelgrafen en componenten



Deelgraaf

Een graaf $G'(V', E')$ is een deelgraaf van een graaf $G(V, E)$, genoteerd $G' \subseteq G$ als en slechts als $V' \subseteq V$ en $E' \subseteq E$ met $E' = E \cap M_2(V')$



Geïnduceerde deelgraaf

We noemen de deelgraaf $G'(V', E')$ geïnduceerd door V' als en slechts als $E' = \{(v, w) \in E \mid v, w \in V'\}$



Component

Een graaf $G(V, E)$ is een component van een graaf $G'(V', E')$ als en slechts als

- $G \subseteq G'$
- G is niet leeg
- G is samenhangend
- er bestaat geen samenhangende graaf G'' waarvoor

Eigenschappen

- Zij $G(V, E)$ een graaf met n componenten $G_i(V_i, E_i)$ dan geldt:
 - $\bigcup_i V_i = V$
 - $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset$
 - $\bigcup E_i = E$
 - $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$
- Een component $G_i(V_i, E_i)$ is steeds gelijk aan de deelgraaf geïnduceerd door V_i

4.2.4 Gerichte grafen

Bij een gewone graaf geven de bogen een symmetrische relatie aan: als v verbonden is met w dan is w automatisch verbonden met v . Bij een gerichte graaf is dat niet zo.



Gerichte graaf (V, E)

Een gerichte graaf is een koppel (V, E) , met V een verzameling V waarvan de elementen knopen worden genoemd, en $E \subseteq V^2$ een verzameling koppels



(on)gericht pad

- Een **gericht pad** in een gerichte graaf $G(V, E)$ is een pad $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ met $\forall i : (v_i, v_{i+1}) \in E$
- Een **ongericht pad** is een pad $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ met $\forall i : (v_i, v_{i+1}) \vee (v_{i+1}, v_i) \in E$

Eigenschappen

- We noemen een gerichte graaf samenhangend $\Leftrightarrow$ er bestaat een ongericht pad tussen elke twee knopen

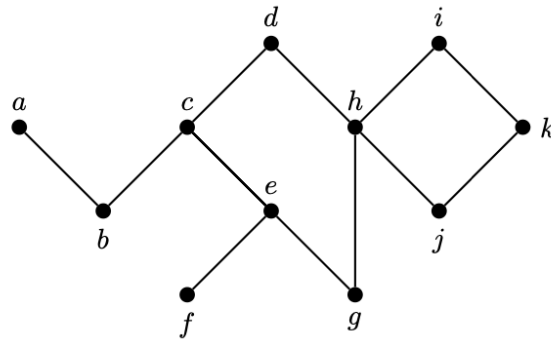
4.3 Voorstellingen van grafen

4.3.1 Buurmatrix



Buurmatrix

Gegeven een **enkelvoudige** graaf $G(V, E)$, met $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ is de **buurmatrix** van G een $n \times n$ -matrix met $A_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E$ en $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \notin E$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenschappen

- Als A de buurmatrix is van een enkelvoudige graaf $G(V, E)$ dan geldt voor A^k het volgende: voor alle i en j is $(A^k)_{ij}$ gelijk aan het aantal verschillende paden van lengte k tussen v_i en v_j

4.3.2 Booleanse buurmatrix



Booleanse buurmatrix

Gegeven een **enkelvoudige** graaf $G(V, E)$, met $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, is de booleanse buurmatrix van G een $n \times n$ matrix B met $B_{ij} = ((v_i, v_j) \in E)$

Eigenschappen

- Als B de booleanse buurmatrix van $G(V, E)$ is, dan geldt voor B^k het volgende: voor alle i en j is $(B^k)_{ij}$ equivalent met "er bestaat een pad van lengte k van v_i naar v_j ".

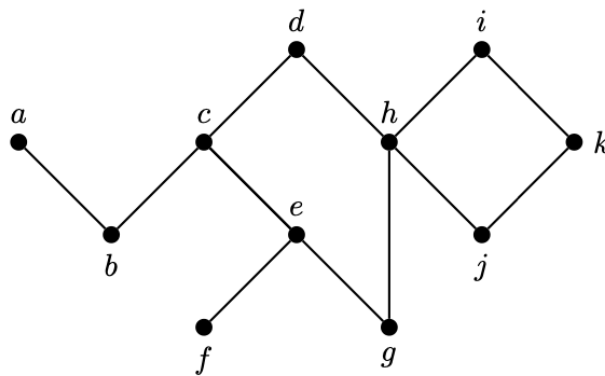
- Als B de booleaanse buurmatrix van $G(V, E)$ is, geldt voor $S = \sum_{k=1}^l B^k$ het volgende: voor alle i en j is S_{ij} equivalent met "er bestaat een pad van lengte l of korter tussen v_i en v_j ".

4.3.3 Incidentiematrix



Incidentiematrix

Gegeven een enkelvoudige graaf $G(V, E)$, met $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, is de incidentiematrix van G een $n \times m$ -matrix A met $A_{ij} = 1$ als e_j invalt op v_i , en $A_{ij} = 0$ in alle andere gevallen.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 Graaf-isomorfisme



Graaf-isomorfisme

Twee grafen $G(V, E)$ en $G'(V', E')$ zijn isomorf $\Leftrightarrow$ er bestaat een bijectie $h : V \rightarrow V'$, zo dat $\{h(x) \mid x \in V\} = V'$ en $\{h(x), h(y) \mid (x, y) \in E\} = E'$

Eigenschappen

- Twee grafen zijn isomorf $\Rightarrow$ ze hebben dezelfde matrixvoorstelling
- Twee enkelvoudige grafen zijn isomorf $\Leftrightarrow$ er bestaat een ordening van de knopen zodat hun buurmatrix gelijk is
- Twee grafen G en G' zijn isomorf $\Leftrightarrow$ er bestaat een ordening van de knopen en bogen waarvoor de incidentiematrices van G en G' gelijk zijn

4.5 Gewogen grafen



Het **gewicht van een graaf/pad** definiëren we als de som van de gewichten van de bogen in **die graaf/dat pad**



Het **korste pad** tussen v_i en v_j is het pad tussen a en b met het **kleinst gewicht**

4.5.2 Dijkstra, versie 1

Gegeven knoop a naar knoop z in een enkelvoudige, samenhangende, gewogen graaf $G(V, E)$ met $a, z \in V$

```

R := ∅
L(a) := 0
voor alle v ≠ a: L(v) := ∞
zolang z ∉ R:
    kies v ∈ V \ R zo dat L(v) zo klein mogelijk is
    R := R ∪ {v}
  
```


voor elke boog $(v, v') \in E$ met $v' \in V \setminus R$:
 $L(v') := \min\{L(v) + w(v, v'), L(v')\}$

Zie correctheidsbewijs cursus

Eigenschappen

- Zij gegeven een gewogen graaf $G(V, E)$, een knoop $a \in V$ en een knoop $z \in V$, waarop het algoritme van Dijkstra uitgevoerd wordt. Wanneer het algoritme van Dijkstra eindigt, is $L(z)$ het gewicht van het kortste pad van a naar z , dat wil zeggen $L(z) = \lambda(z)$
- Voor elke eindige graaf geldt: het algoritme van Dijkstra eindigt steeds.

4.5.3 Dijkstra, versie 2

```
R := ∅
L(a) := 0
voor alle v ≠ a: L(v) := ∞
zolang z ∉ R:
  kies v ∈ V \ R zo dat L(v) zo klein mogelijk is
  R := R ∪ {v}
  voor elke boog (v, v') ∈ E:
    als L(v) + w(v, v') < L(v') dan:
      L(v') := L(v) + w(v, v')
      p(v') := v
```

Met dit algoritme kan je voor elke knoop in R het kortste pad achterwaards construeren.

4.5.4 De complexiteit van Dijkstra's algoritme

De complexiteit van Dijkstra's algoritme is $\mathcal{O}(n^2)$, als je $v \in V \setminus R$ zo dat $L(v)$ minimaal is, in lineaire tijd kan vinden is de tijdscomplexiteit $\mathcal{O}(|V| \log |V| + |E|)$, of dit beter dan $\mathcal{O}(|V|^2)$ hangt af van $|E|$

4.6 Bijzondere klassen grafen



Tweeledige grafen

Een graaf $G(V, E)$ is tweeledig $\Leftrightarrow$ Er V_1 en V_2 bestaan zo dat

- $V_1 \neq \emptyset$
- $V_2 \neq \emptyset$
- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $E \subseteq \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

informeel: Een enkelvoudige graaf is tweeledig a.s.a. V kan worden opgedeeld in twee niet-lege deelverzamelingen zo dat er bogen bestaan tussen V_1 en V_2 maar niet binnen V_1 of V_2



Volledig verbonden tweeledige grafen

Een tweeledige graaf wordt volledig verbonden genoemd als elke knoop uit V_1 verbonden is met elke knoop uit V_2

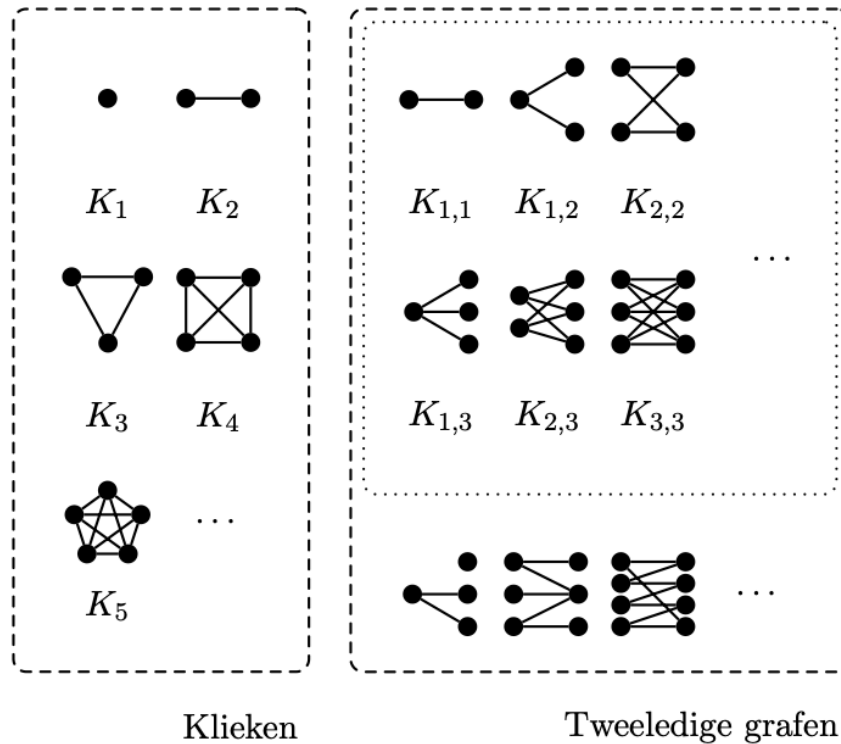
Notatie: $K_{x,y}$



Kliken

Een kliek is een enkelvoudige samenhangende graaf waar elke knoop rechte reeks verbonden is met elke andere knoop.

Notatie: K_n



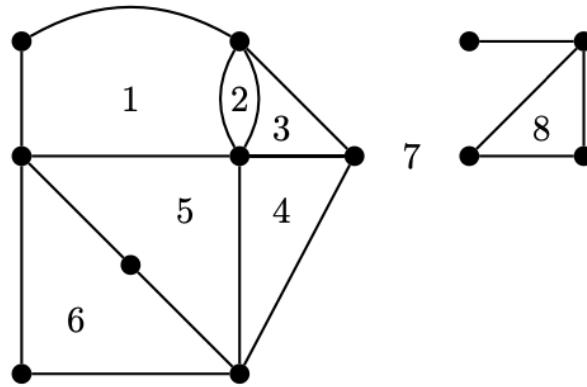
Let er wel op dat K_2 isomorf is met $K_{1,1}$, de klasse binnen de tweeledige grafen zijn de volledig verbonden tweeledige grafen

4.7 Vlakke grafen



Vlakke graaf

Een vlakke graaf is een graaf die getekend kan worden zonder snijdende bogen



Een vlakke graaf die uit twee componenten bestaat. De zijvlakken zijn genummerd van 1 tot 8.
Merk op dat het buitenste gebied ook meetelt als zijvlak

Eigenschappen

- Elke deelgraaf van een vlakke graaf is steeds vlak
- Elke kringvrije graaf is vlak en heeft 1 zijvlak

4.7.1 De formule van Euler

Lemma 4.13: In een kringvrije graaf met minstens 1 boog bestaat er steeds een knoop met graad 1



De formule van Euler

Zij G een samenhangende vlakke graaf met $v \geq 1$ knopen, e bogen en f zijvlakken geldt:

$$v - e + f = 2$$

Eigenschappen

- De formule van Euler kan veralgemeend worden tot elke vlakke graaf met c componenten: $v - e + f - c = 1$

Veelvlakken

Eigenschappen

- Je kan een veelvlak projecteren op het vlak door 1 zijvlak "uit te rekken" tot het zo groot is als alle andere zijvlakken samen. Die projectie in het vlak vormt een

vlakke graaf waarbij

- alle knopen hoeken zijn,
- de bogen ribben
- de zijvlakken, zijvlakken
- het “meest uitgerokken” zijvlak is het achterste zijvlak



Een **Platonische lichaam** is een veelvlak waarbij alle zijvlakken dezelfde regelmatige veelhoeken zijn. Ze worden ook **regelmatige veelvlakken** genoemd.

- Er zijn maar 5 Platonische lichamen
 - een Platonisch lichaam komt overeen met een vlakke graaf met een constante graad (minstens 3) en een constant aantal begrensde bogen (minstens 3), omdat elke boog twee zijvlakken scheidt geldt dat $f\beta = 2e$

zie verdere uitleg blz 104

4.7.2 Karakterisatie van vlakke grafen



Vlakke graaf (β, B)

Gegeven een vlakke graaf G , noteren we het aantal bogen waardoor een zijvlak z begrensd wordt als $\beta(z)$. De som van $\beta(z)$ voor alle zijvlakken z wordt B genoteerd: $B = \sum_{z \in Z} \beta(z)$, met Z de verzameling zijvlakken van de graaf.

Eigenschappen

- Voor elke vlakke graaf geldt: $B \leq 2e$
- Voor elke enkelvoudige vlakke graaf met $f \geq 2$ geldt: $B \geq 3f$
- Voor elke enkelvoudige vlakke graaf met $f \geq 2$ geldt: $2e \geq 3f$
- K_5 en $K_{3,3}$ zijn niet vlak
- Voor elke vlakke samenhangende deelgraaf geldt: $e \leq 3v - 6$

Homeomorfisme

In een tekening van een graaf is een knoop met graad 2 overbodig: we kunnen de twee bogen en 1 knoop vervangen door 1 boog → rijreductie



Homeomorfisme

Een graaf $G(V, E)$ is homeomorf met een graaf $G'(V', E')$ als en slechts als G' uit G bekomen kan worden door nul, 'e'-en of meer keren een knoop v van graad 2 te kiezen, die samen met zijn invallende bogen (v, w) en (v, u) te verwijderen, en boog (u, w) toe te voegen

Eigenschappen

- Als G homeomorf is met G' , geldt: G is vlak $\Leftrightarrow G'$ is vlak

De stelling van Kuratowski



Stelling van Kuratowski

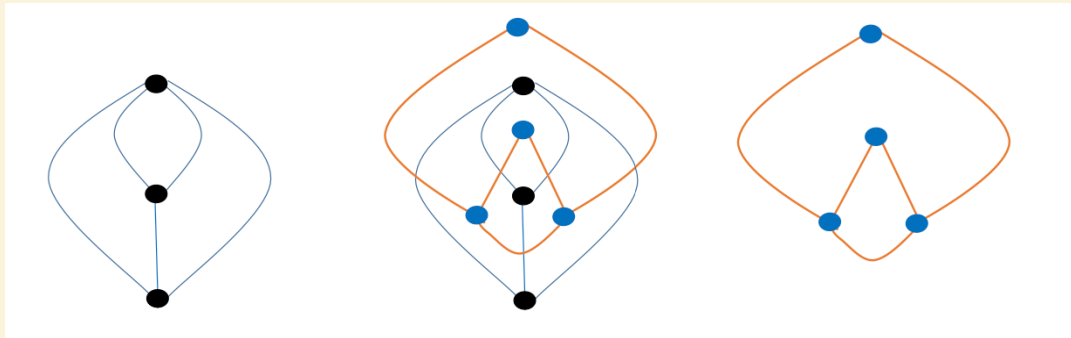
Een graaf is vlak $\Leftrightarrow$ de graaf bevat geen deelgraaf die homeomorf is met K_5 of $K_{3,3}$

4.7.3 Duale grafen



Duale graaf

Zij G een graaf met v knopen, e bogen, f zijvlakken. De duale graaf G' heeft 1 knoop voor elk zijvlak van G dus $v' = f$ knopen. Voor elke boog tussen de oorspronkelijke zijvlakken is er een boog tussen de overeenkomstige knopen in de duale graaf.



constructie van een duale graaf

Eigenschappen

- De duale graaf van een vlakke graaf is ook vlak
 - Als z een zijvlak is, en x de overeenkomstige knoop in de duale graaf, dan geldt steeds: $\delta(x) = \beta(z)$

4.8 Kleuring van grafen



(minimale) kleuring

Met een kleuring van een graaf (V, E) bedoelt men een toekenning van een kleur aan elke $v \in V$ zodanig dat de kleur van v en w verschilt indien $(v, w) \in E$.

Een **n -kleuring** is een kleuring met n of minder verschillende kleuren.

Een **minimale kleuring** is een **n -kleuring** met minimale n

Eigenschappen

- In elke vlakke, enkelvoudige graaf bestaat er minstens één knoop, zeg w , zodanig dat $\delta(w) \leq 5$

- Elke enkelvoudige, vlakke graaf heeft een 5-kleuring

4.9 Bomen



Bomen

Een boom is een samenhangende graaf die geen kringen bevat



Een boom is een enkelvoudige graaf waarin tussen elke twee knopen precies 1 pad bestaat



Een boom is een samenhangende graaf met n knopen en $n - 1$ bogen.



Een boom is een kringvrijegraaf met n knopen en $n - 1$ bogen.

In de rest van het hoofdstuk is een pad steeds een enkelvoudig pad

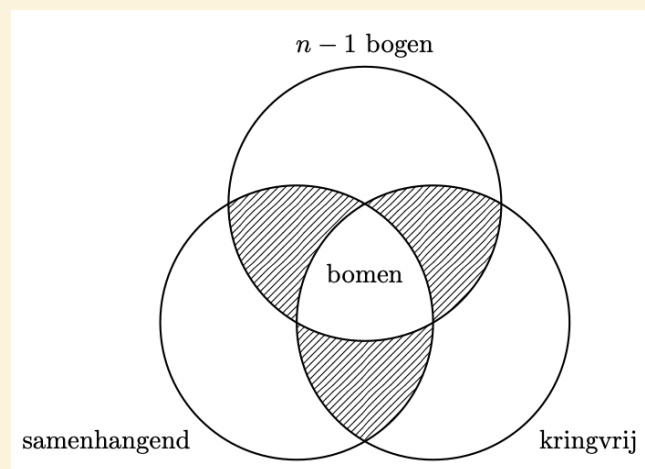
Eigenschappen

- Tussen twee verschillende knopen v en w die deel uitmaken van dezelfde kring, bestaan steeds minstens 2 verschillende paden.
- Als tussen twee verschillende knopen in een graaf G twee verschillende paden P_1 en P_2 bestaan, bevat G een kring.



Zij T een graaf met n knopen. Elk van de volgende condities impliceert alle andere:

1. T is enkelvoudig en tussen elke 2 knopen van T bestaat precies 1 pad.
2. T is samenhangend en kringvrij.
3. T is samenhangend en heeft $n - 1$ bogen.
4. T is kringvrij en heeft $n - 1$ bogen.



grafen voldoen steeds aan 0, 1 of 3 van de getoonde eigenschappen

4.9.1 Opspannende bomen



$T(V_T, E_T)$ is een opspannende boom voor $G(V, E) \Leftrightarrow T$ is een boom, $V_T = V$ en $E_T \subseteq E$. (Een opspannende boom is ook natuurlijk een boom)

Eigenschappen

- Een samenhangende boom hoeft niet uniek te zijn, een boom kan meerdere opspannende bomen hebben
- Een boom kan een opspannende boom zijn van zichzelf
- Als G samenhangend is, dan bestaat er een opspannende boom T voor G .
- Een graaf heeft een opspannende boom $\Leftrightarrow$ de graaf is samenhangend

- Als T een maximale kringvrije deelgraaf is van een samenhangende graaf G , dan is T een opspannende boom van G
- Als T een kringvrije deelgraaf is van een samenhangende graaf G , en T heeft $n - 1$ bogen, dan is T een opspannende boom voor G

4.9.2 Minimale opspannende bomen



Een **minimaal opspannende boom (MOB)** van een gewogen graaf G is een opspannende boom van G waarvoor geldt dat geen andere opspannende boom een kleiner gewicht heeft.

Het algoritme van Prim

Het algoritme van Prim bouwt een MOB op door herhaaldelijk een boog toe te voegen aan de reeds opgebouwde boom, op zo'n manier dat opnieuw een boom bekomen wordt, en zo dat, wanneer het algoritme stopt de gevonden boom een minimaal opspannende boom is.

Gegeven: een samenhangende graaf $G(V,E)$ met n knopen

Resultaat: T , een MOB voor G

$T := (\{v_0\}, \emptyset)$

zolang T minder dan $n-1$ bogen heeft:

$K := \{(u,v) \in E \mid u \in T, v \notin T\}$

$T := T \cup \{\arg \min_{e \in K} w(e)\}$

Het algoritme van Kruskal

Het algoritme van Kruskal werkt op een gelijkmatige manier als dat van Prim, maar de deelgraaf S die opgebouwd wordt is niet noodzakelijk samenhangend (dus niet noodzakelijk een boom), maar wel altijd kringvrij

Gegeven: een samenhangende graaf $G(V,E)$ met n knopen

Resultaat: S , een MOB voor G

$S := (\emptyset, \emptyset)$

zolang S minder dan $n-1$ bogen heeft:

$(u,v) :=$ de boog $\notin S$ met het kleinste gewicht die geen kring in S maakt voeg ($($

4.10 Gewortelde bomen



Een **gewortelde boom** (V, E, w) is een boom (V, E) waarin een willekeurige knoop aangeduid is als wortel w . In een gewortelde boom is elke knoop v verbonden met de wortel door een uniek pad beginnend in de wortel

Eigenschappen

- de lengte van het dit pad noemen we de hoogte van v , $h(v)$
- de hoogte van de boom $h(T) = \max\{h(v) \mid v \in V\}$
- Voor elke i, j met $i < j$ geldt:
 - v_i is een **ouder** van v_{i+1}
 - v_{i+1} is een **kind** van v_i
 - v_i is een **voorouder** van v_j
 - v_j is een **afstammeling** van v_i

4.10.1 Binaire bomen

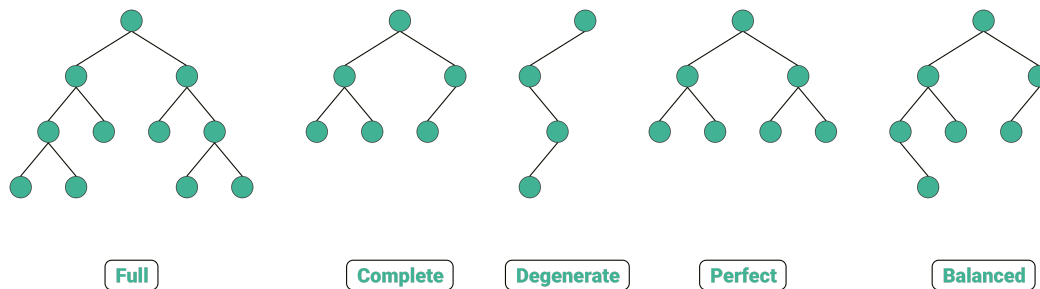


Een **binaire boom** is een gewortelde boom waarin elke knoop hoogstens twee kinderen heeft.

Eigenschappen

- Een boom waarin elke inwendige knoop twee kinderen heeft noemen we een **volledige binaire boom**
- In binaire bomen maken we het onderscheid tussen linker- en rechterkind; m.a.w. een boom waarin x_1 het linkerkind is en x_2 het rechter- is niet dezelfde boom
- Elke volledige binaire boom met i inwendige knopen heeft $i + 1$ bladeren en $2i + 1$ knopen in totaal
- In een binaire boom met t bladeren en hoogte h geldt: $t \leq 2^h$

- In een binaire boom met n knopen en hoogte h geldt: $n + 1 \leq 2^{h+1}$



- Full: elke inwendige knoop heeft twee kinderen
- Complete: elke laag is volledig gevuld, buiten de laatste
- Perfect: elke laag is volledig gevuld
- Degenerate: elke node heeft maar 1 kind

→ deze staan niet in het boek

4.10.2 Zoekbomen



Binaire zoekboom

Een binaire zoekboom is een binaire boom waarin met elke knoop v een waarde $w(v)$ geassocieerd is zodanig dat als l behoort tot de linker- en r tot de rechterdeelboom van v , dan $w(l) < w(v) < w(r)$

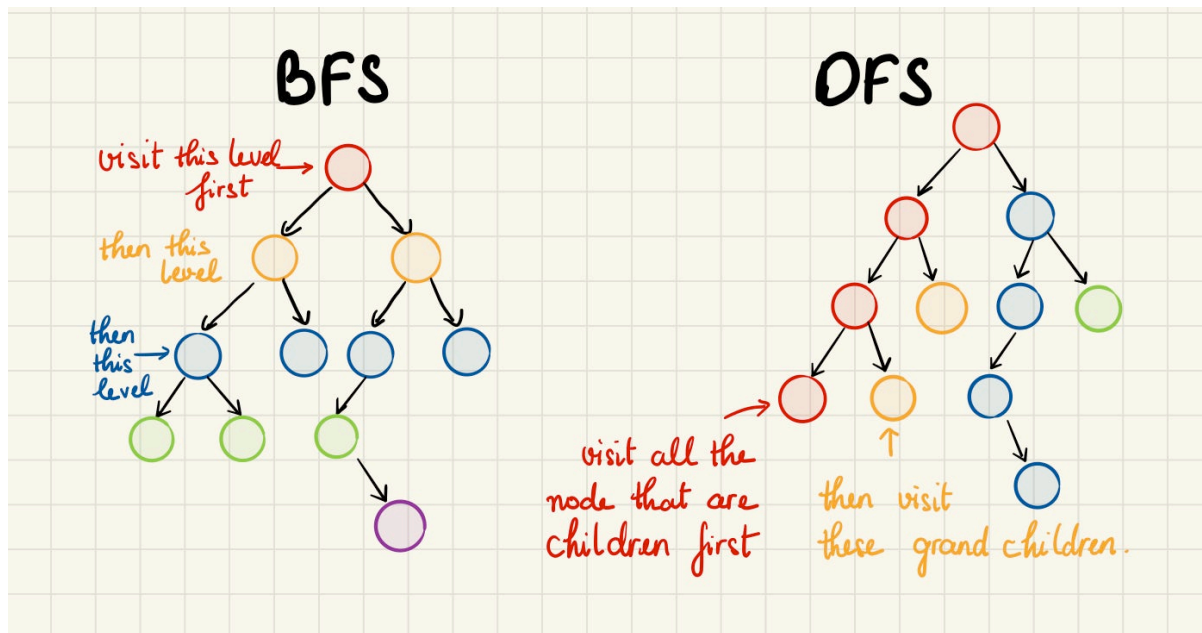
4.10.4 Het doorlopen van gewortelde bomen

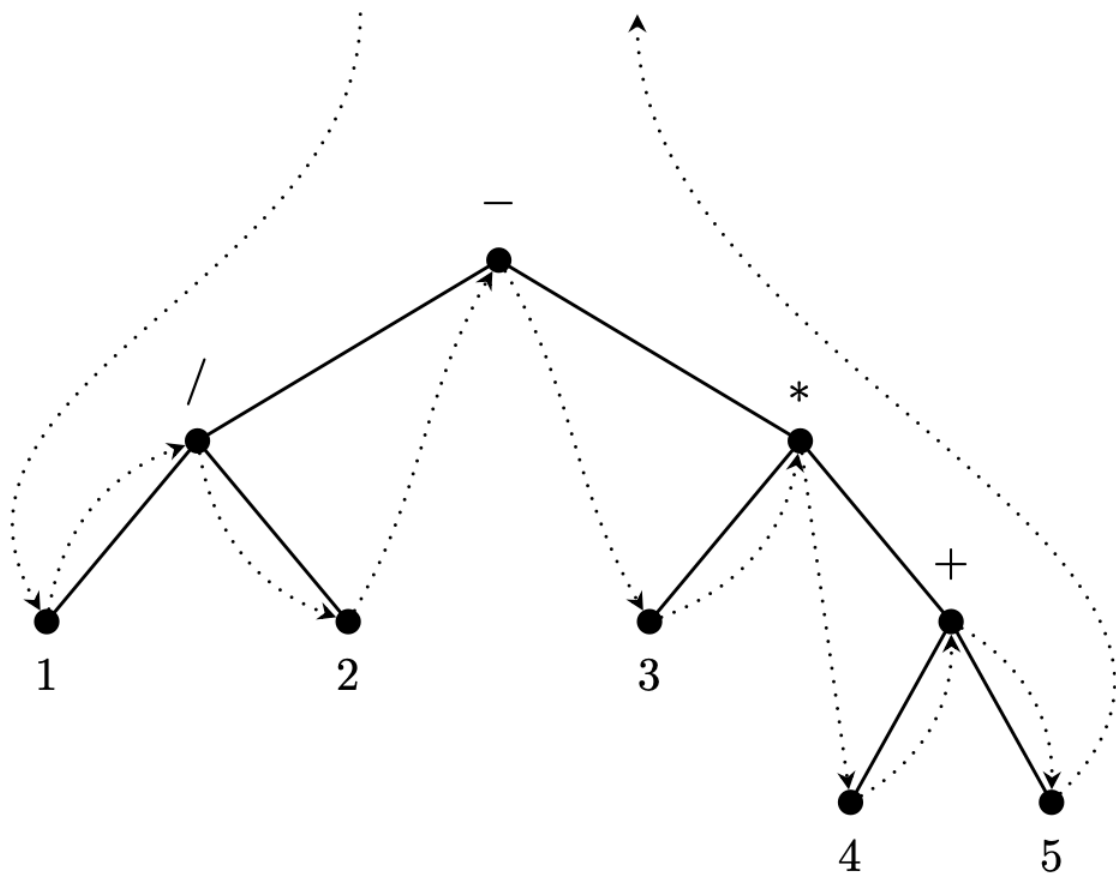
```

S := {w}
R := ∅
zolang S != ∅:
    kies een willekeurige knoop a ∈ S
    S := S \ {a} ∪ {k | k ∈ kinderen(a)}
    R := R ∪ {a}
    behandel a
  
```

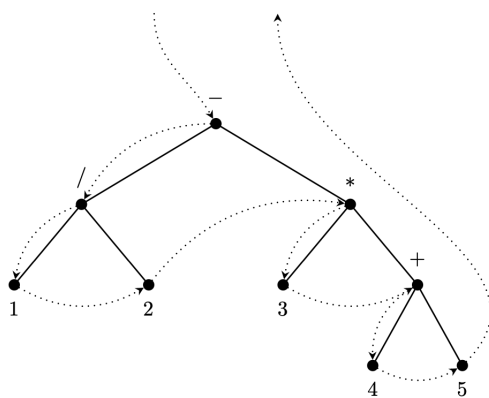
Dit algoritme behandelt elke knoop in de boom precies 1 keer

Diepte-eerst een breedte-eerst doorlopen van een boom

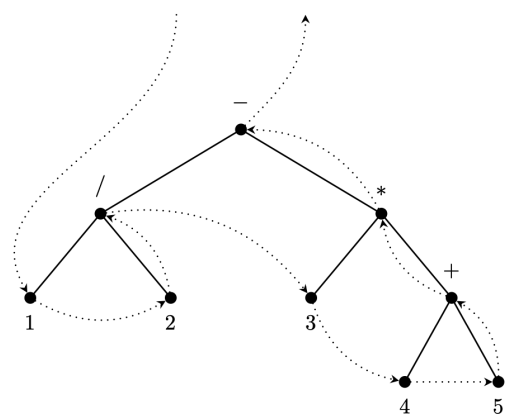




infixorde



prefixorde



postfixorde

zie minmaxalgoritme cursus

4.11 Netwerkmodellen en Petri-netten

4.11.1 Transportnetwerk



Transportnetwerk

een transportnetwerk (of gewoon netwerk) is een enkelvoudige, gewogen, gerichte graaf G dat voldoet aan:

1. Er is juist 1 knoop in G zonder binnenkomende bogen; deze knoop wordt de **bron** genoemd
2. er is juist 1 knoop in G zonder buitengaande bogen; deze knoop wordt de **put** genoemd
3. het gewicht C_{ij} van de gerichte boog (i, j) is positief en wordt de **capaciteit** van de boog genoemd
4. G is samenhangend



Stroming

Voor elk netwerk $G(V, E)$ met capaciteiten $C_{ij}, i, j \in V$, is F een **stroming** als F een afbeelding is van E naar $\mathbb{R}^+$ zodanig dat

1. $F(i, j) \leq C_{ij}$
2. voor elke knoop j die niet de bron of de put is geldt:

$$\sum_{i \in V} F(i, j) = \sum_{i \in V} F(j, i)$$

We noemen $F(i, j)$ de stroming in boog (i, j) . Voor een knoop j noemen we $\sum_{i \in V} F(i, j)$ de stroming **naar** of **in** j en $\sum_{i \in V} F(j, i)$ de stroming **uit** j .

Eigenschappen

- Van een stroming F in een netwerk $G(V, E)$ is de stroming uit de bron gelijk aan de stroming in de put, of meer formeel:

$$\sum_{i \in V} F(a, i) = \sum_{i \in V} F(i, z)$$



De **grootte van een stroming** F in een netwerk $G(V, E)$ met bron a en put z is gedefinieerd door $\sum_{i \in V} F(a, i)$ of $\sum_{i \in V} F(i, z)$. We noteren de grootte van F als $|F|$

4.11.2 Maximale stroming



Goede/slechte boog

In een gerichte graaf met pad $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ noemen we de boog (v_i, v_{i+1}) **goed** indien $(v_i, v_{i+1}) \in E$ en anders **slecht**



Verbeteren van een stroming

Zij P een pad van a naar z in een netwerk $G(V, E)$, waarbij

1. $\forall (i, j) \in P_+ : F(i, j) < C_{ij}$
2. $\forall (i, j) \in P_- : 0 < F(i, j)$

Laat bovendien $\Delta = \min(\min_{(i,j) \in P_+} \{C_{ij} - F(i, j)\}, \min_{(i,j) \in P_-} \{F(i, j)\})$; definieer de functie F' als volgt:

$$\begin{aligned} F'(i, j) &= F(i, j) & \forall (i, j) \notin P \\ &= F(i, j) + \Delta & \forall (i, j) \in P_+ \\ &= F(i, j) - \Delta & \forall (i, j) \in P_- \end{aligned}$$

Dan is F' een stroming waarvan de grootte Δ meer is dan die van F .

zie algoritme constructie van een maximale stroming blz. 153



Een **sneede** van een netwerk $G(V, E)$ met bron a en put z , is een 2-tal $(P, \overline{P})$ zodanig dat $a \in P, z \in \overline{P}, P \cup \overline{P} = V, P \cap \overline{P} = \emptyset$



De **capaciteit van een sneede** $(P, \overline{P})$ is $C(P, \overline{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij}$

Eigenschappen

- De capaciteit van een sneede is niet kleiner dan een stroming

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij} \geq \sum_{i \in V} F(a, i)$$



Max flow, min cut

Voor een sneede $(P, \overline{P})$ en stroming F in een net $G(V, E)$ geldt dat als

$$C(P, \overline{P}) = |F| \quad \left(\text{of dus als } \sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij} = \sum_{i \in V} F(a, i) \right)$$

dan is de stroming maximaal en de sneede minimaal

Bovendien is die gelijkheid equivalent met

- $\forall i \in P, j \in \overline{P} : F(i, j) = C_{ij}$ en
- $\forall i \in \overline{P}, j \in P : F(i, j) = 0$

4.11.3 Matching



Matching

Voor een gerichte tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waarbij $V \cap W = \emptyset$ en $E \subseteq V \times W$, is M een **overeenkomst** of **matching** indien:

- $M \subseteq E$ en
- $\forall (x, y), (i, j) \in M$: indien $(i, j) \neq (x, y)$ dan is $i \neq x$ en $j \neq y$ (t.t.z. in elke knoop komt hoogstens één boog aan en vertrekt er hoogstens één)

Een **maximale** matching heeft een maximaal aantal bogen in M . Een matching is **volledig** indien $\forall v \in V, \exists w \in W : (v, w) \in M$

Eigenschappen

- Voor een gerichte, tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waarbij $V \cap W = \emptyset$ en $E \subseteq V \times W$, geldt dat
 - Een gehele stroming F in het overeenkomstige matchinnetwerk, geeft een matching in $G : v \in V$ komt overeen met $w \in W$ als en slechts als $F(v, w) = 1$
 - Een maximale gehele stroming komt overeen met een maximale matching
 - Een gehele stroming met grootte $|V|$ komt overeen met een volledige matching



De trouwstelling van Hall

Een gerichte, tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waarbij $V \cap W = \emptyset$ en $E \subseteq V \times W$, heeft een volledige matching $\Leftrightarrow |S| \leq |R(S)|, \forall S \subseteq V$

4.11.4 Petrinetten



Een **Petrinet** is een enkelvoudige gerichte graaf $G(V, E)$ waarbij $V = P \cup T, P \cap T = \emptyset$ en $E \subseteq P \times T \cup T \times P$; P noemen we plaatsen en T transities



Een **markering** van een Petrinet is een toekenning van een natuurlijk getal aan elke plaats van het Petrinet



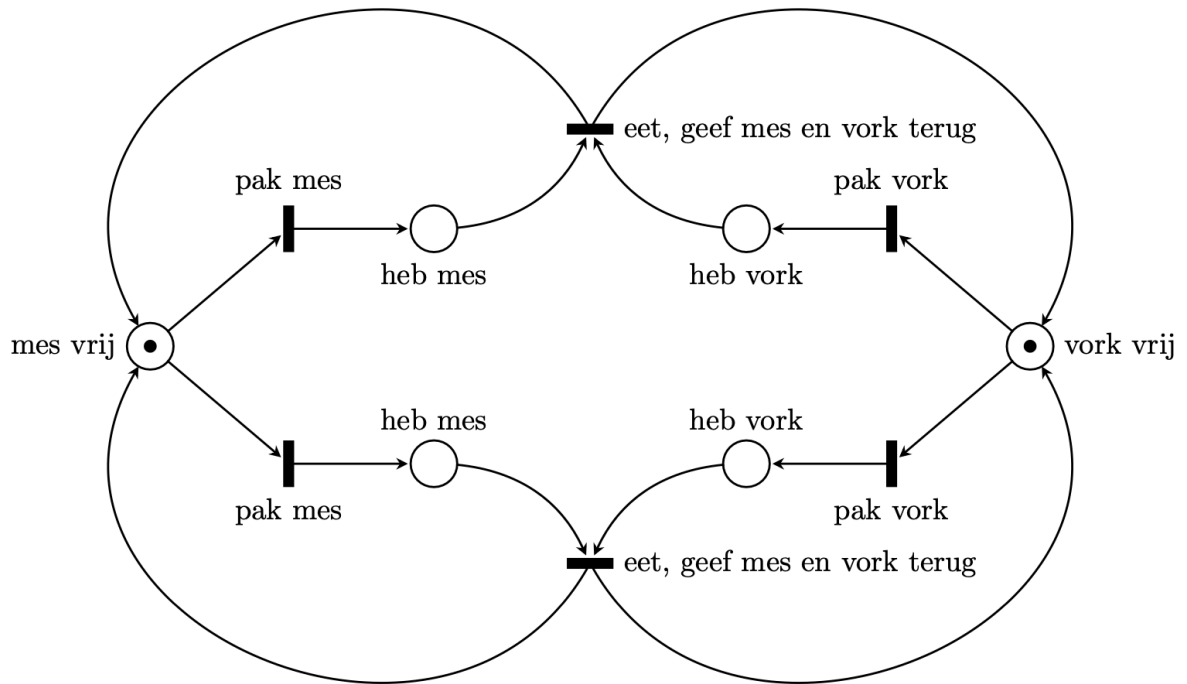
Een markering M' is **bereikbaar** vanuit een markering M , indien er vertrekkend van M een salvo is dat M' als resultaat heeft



Een markering M van een Petrinet is **levend**, indien na elk salvo te beginnen bij M , er voor elke transitie t een salvo bestaat zodanig dat salvo t actief wordt (als een markering levend is dan is het duidelijk dat die markering geen aanleiding kan zijn tot deadlock)



Een markering M is **begrensd indien er een eindige n** bestaat zodanig dat bij gelijk welk salvo, geen enkele plaats ooit meer dan n tokens bevat. Een begrensde waarvoor $n = 1$ wordt een veilige markering genoemd



voorbeeld van een deadlock