

Examen getaltheorie 2^{de} licentie wiskunde januari 2003

Vraag 1

Zij $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, met d een kwadraatvrij natuurlijk getal. Zij ε de fundamentele eenheid van K , en veronderstel dat $N_K(\varepsilon) = 1$. Zij x een algebraïsch geheel in K met $N_K(x) < 0$. Veronderstel dat het ideaal voortgebracht door x in $\mathcal{O}_K$ gelijk is aan het kwadraat van een ideaal J in $\mathcal{O}_K$. Bewijs dat J geen hoofdideaal is.

Vraag 2

Bereken de discriminant van $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Vraag 3

Zij K een getallenveld en J een ideaal van $\mathcal{O}_K$. Zij $a \in J$. Veronderstel dat $N_K(a)$ en $N(J)$ dezelfde absolute waarde hebben. Bewijs dat het ideaal J voortgebracht wordt door a .

Vraag 4

Zij h het klassengetal van een getallenveld K . Zij I en J idealen van $\mathcal{O}_K$ en zij p een priemgetal dat geen deler is van h . Veronderstel dat de idealen I^p en J^p equivalent zijn. Bewijs dan dat I en J equivalent zijn.

Vraag 5

Zij K een getallenveld van graad n over $\mathbb{Q}$. Zij $a_1, a_2, \dots, a_n$ algebraïsche gehelen van K die een basis vormen voor K als vectorruimte over $\mathbb{Q}$. Zij Δ de discriminant van $a_1, a_2, \dots, a_n$ en zij e het grootste natuurlijke getal waarvan het kwadraat een deler is van Δ . Zij A de deelgroep van $\mathcal{O}_K$ voortgebracht door $a_1, a_2, \dots, a_n$. Bewijs dat de index van A in $\mathcal{O}_K$ een deler is van e . Dus $\mathcal{O}_K$ is bevat in $e^{-1}A$.

Vraag 6

Zij $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Geef expliciet een priemideaal in $\mathcal{O}_K$ dat boven 5 ligt en een priemideaal in $\mathcal{O}_K$ dat boven 7 ligt. Geef ook de ontbinding in priemidealen van het ideaal van $\mathcal{O}_K$ voortgebracht door 5. (Voor de verificatie van enkele details kun je vraag 5 gebruiken).

Vraag 7

Zij a een natuurlijk getal en zij b het kwadraat van een natuurlijk getal dat onderling ondeelbaar is met a en dat groter is dan 4. Bewijs dat er oneindig veel punten (x, y) op de elliptische kromme $y^2 = x^3 + ax + b$ liggen met x, y in $\mathbb{Q}$.

Opmerking: Voor diegenen die gekozen hebben voor gedeeltelijk gesloten boek: Vraag 1 valt voor hen weg, en het gesloten boek gedeelte bestaat uit vraag twee en de volgende vraag: Bewijs dat in een UIFD (uniek ideaal factorisatie domein) elk niet nul fractioneel ideaal invertibel is.