

Examen getaltheorie 2^{de} licentie wiskunde januari 2004

Vraag 1

Zij K een getallenveld, en A een niet-nul ideaal van $\mathcal{O}_K$. Bewijs dat $\mathcal{O}_K/A$ eindig is.

Vraag 2

a) Bereken de structuur van de eenhedengroep van $\mathcal{O}_K$, waarbij $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$.

b) Zoek de fundamentele eenheid van $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.

c) Aangaande de vergelijking $y^2 + d = x^3$, met d een gegeven positief geheel getal: Waarom is de geziene methode (voor $d = 13$) ook toepasbaar van zodra het klassengetal van $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ niet deelbaar is door 3.

Vraag 3

Bereken de generatoren van hoofdidealen A en B in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-6})}$ zodat $A(2, \sqrt{-6}) = B(3, \sqrt{-6})$.

We eisen dat A en B niet nul zijn.

Vraag 4

Zij K een getallenveld van graad n over $\mathbb{Q}$. Zij α een algebraïsch geheel in K , met $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Veronderstel dat $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ een integrale basis is voor K . Zij $f(X)$ de minimale monische veelterm van α over $\mathbb{Q}$. Zij p een priemgetal. Zij $g(X)$ een monische veelterm over $\mathbb{Z}$.

Veronderstel dat $g(X) \bmod p$ irreduciebel is over $\mathbb{Z}_p$ en een deler is van $f(X) \bmod p$.

Bewijs dat er een priemideaal, met graad gelijk aan de graad van $g(x)$, boven p ligt in $\mathcal{O}_K$. En geef generatoren voor zo een priemideaal.

Vraag 5

Bepaal **alle** oplossingen in $\mathbb{Z}$ van de vergelijking $x^2 - 10y^2 = -9$.