Examen getaltheorie 2de licentie wiskunde januari 2007

Vraag 1 (gesloten boek, 5 punten)
Zij R een UIFD (dat is een integriteitsdomein waarin unieke ontbinding in *priemidealen* geldt). Veronderstel dat elk niet-nul priemideaal van R maximaal is. Bewijs dan dat elk niet-nul fractioneel ideaal van R *invertiebel* is.

Vraag 2 (3 punten)
Aangaande het bewijs van Eigenschap 4.5 (over het verband tussen de norm van een ideaal en discriminanten) op pagina 54 van de cursustekst: Verklaar het bestaan van het isomorfisme op regel 7 in het bewijs.

Vraag 3 (3 punten)
Zij K een getallenveld. Zij A en B priemidealen van $\mathbf{O}_K$, met $A \neq B$. Bewijs dat $A \cap B = AB$.

Vraag 4 (3 punten)
Zij p een priemgetal met $p \equiv 1 \bmod 4$. Bewijs dat het klassengetal van $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ even is.
Hint: ontbind het ideaal voortgebracht door 2 in priemidealen, in de ring ……

Vraag 5 (6 punten)
Zij K = $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{21})$. Ontbind het ideaal $13\mathbf{O}_K$ in priemidealen. Beredeneer elke stap!