Examen Algebraïsche Getaltheorie 1Ma Wiskunde juni 2009

Vraag 1
Zij K een getallenveld. Bewijs: er bestaat een integrale basis voor $\mathbf{O}_K$.

Vraag 2
Bereken de structuur van de groep van de ideaalklassen van $\mathbf{Z}[\sqrt{-21}]$. Je mag hierbij geen tabellen gebruiken.

Vraag 3
Zij $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{3})$ en $L = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-1})$. Zij U de eenhedengroep van $\mathbf{O}_K$ en W de eenhedengroep van $\mathbf{O}_L$. Toon aan dat de quotientgroep W/U een oneindige cylische deelgroep C bevat zodat het quotient (W/U)/C eindig is.

Vraag 4
Bepaal alle priemgetallen waarboven precies 4 priemidealen liggen in de ring van de algebraische gehelen in $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$.

Vraag 5
Verklaar <u>in detail</u> de volgende bewering: Zij $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$. Omdat de decompositiegroep van een niet-geramifiëerd priemideaal van $O_{\mathbf{K}}$ steeds cyclisch is, hebben we dat er geen enkel priemgetal *p* bestaat met slechts één priemideaal boven *p* in $O_{\mathbf{K}}$ en met *p* niet-geramifiëerd in $O_{\mathbf{K}}$.