Examen getaltheorie, 10 juni 2011

Voor dit examen kreeg je vier uur tijd.

1. (mondeling toe te lichten)

   (a) Leg de laatste zin uit van het bewijs van eigenschap 6.4.4.

   (b) Bij het bewijs van stelling 7.1.3: leg uit waarom oplosbaarheid in K van $ax^2+\beta y^2 = 1$ equivalent is met de oplosbaarheid in K van $(u+\sqrt{a}v)(u-\sqrt{a}v) = \beta$.

2. We geven een alternatief bewijs voor de oplosbaarheid (in $\mathbb{Z}$) van $x^2+y^2 = p$ voor $p \equiv 1 \pmod 4$ priem. Zij hiertoe g een generator van $\mathbb{Z}_p^\times$. Beschouw

   $$\chi : \mathbb{Z}_p^\times, \cdot \to \mathbb{C}^\times, \cdot$$

   het unieke groepsmorfisme met $\chi(g) = i$.

   (a) Toon aan dat χ goed gedefinieerd is en dat voor alle $j \in \mathbb{Z}_p^\times$ geldt dat $g(j)^2 = \left(\frac{j}{p}\right)$.

   (b) Zij $\xi = e^{2\pi i/p}$ en noteer

   $$G_\chi = \sum_{j \in \mathbb{Z}_p^\times} \chi(j)\xi^j,$$

   naar analogie met de Gauss-som $G = \sum_{j \in \mathbb{Z}_p^\times} \left(\frac{j}{p}\right) \xi^j$. Toon aan dat $|G_\chi| = \sqrt{p}$.

   (c) Bewijs dat

   $$G_\chi^2 = \left(\sum_{\substack{a,b \in \mathbb{Z}_p^\times \\ a+b=1}} \chi(a)\chi(b) \right) G$$

   en gebruik dit om aan te tonen dat $x^2 + y^2 = p$ oplosbaar is met gehele getallen (neem de absolute waarde van wat je net bewees en maak gebruik van puntje (b)).

3. Beschouw de congruentie $x^8 - 16 \equiv 0 \pmod p$.

   (a) Toon aan dat deze congruentie een oplossing heeft in $\mathbb{Z}$ voor elk priemgetal p. (Hint: maak een gevalsonderscheid naargelang p mod 8.)

   (b) Toon nu aan dat $x^8 - 16$ een nulpunt heeft in $\mathbb{Q}_p$ asa p een oneven priemgetal is.

4. Zijn volgende uitspraken waar of niet waar? Bewijs je antwoord.

   (a) Zij R, S kwadratische ringen zodat $R \subseteq S$. Noteer hun fundamentele eenheden met u_R en u_S respectievelijk. Dan zal $R = S$ asa $u_R = u_S$.

   (b) Zij $k \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $6k+1$, $12k+1$ en $18k+1$ allemaal priem zijn. Dan is $(6k+1)(12k+1)(18k+1)$ een Carmichael-getal.