Examen Getaltheorie NM

20 juni 2017

1 Theorie

1. Bewijs de congruentie ** in stelling 2.1.2.
2. Bewijs stelling 6.2.4.
3. Bewijs stelling 7.3.3 voor $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$.

2 Oefeningen

1. Van de volgende uitspraken zijn er 2 juist en 2 fout. Bewijs de juiste en weerleg de foute.
   (a) $\sum \frac{2^i}{2^i+1}$ convergeert in $\mathbb{Q}_2$, maar niet in $\mathbb{Q}_3$.
   (b) $\mathbb{Z} + \sqrt{21}\mathbb{Z}$ is een UFD.
   (c) Er bestaat een Carmichaelgetal van de vorm $15p$ met p een priemgetal.
   (d) $x^2 = y^2 + 2$ heeft oneindig veel oplossingen in $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$
2. (a) Los $x^2 - 3y^2 = -2$ op over $\mathbb{Z}$.
   (b) Een driehoeksgetal is een getal van de vorm $\frac{n(n+1)}{2}$ voor n een geheel getal. Bewijs dat er oneindig veel driehoeksgetallen bestaan die drie keer een driehoeksgetal zijn.
3. (a) Toon aan dat $x^3 + 5x + 1 = 0$ juist 1 oplossing heeft in $\mathbb{Q}_7$.
   (b) Bepaal de eerste drie 7-adische cijfers van deze oplossing.
4. (a) Toon aan dat $R_a = \mathbb{Z} + \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\mathbb{Z}$. een kwadratische ring is voor elke $a \in \mathbb{Z}$.
   (b) Toon aan dat R_a reëel is voor $|a| > 2$. en dat $R_a = R_{-a}$.
   (c) Laat zien dat de normafbeelding gegeven is door $N(x + y(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})) = x^2 + axy + y^2$.
   (d) Toon aan dat de fundamentele eenheid gegeven is door $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. als $|a| = 3$ en door $\frac{|a|+\sqrt{a^2-4}}{2}$ als $|a| > 3$.
   (e) Los $x^2 + axy + y^2 = -1$ op over $\mathbb{Z}$ voor alle $a \in \mathbb{Z}$.