

Herexamen Analyse I – september 2024

professor: Gabór Szabo
beschikbare examentijd: 3 uur

Vraag 1

- a. Zijn a en b twee strikt positieve reële getallen zodat $a < b$, en zij n een natuurlijk getal groter dan of gelijk aan 2. Bewijs dat

$$na^{n-1}(b-a) \leq b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b-a)$$

- b. Bewijs dat $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ bijectief is; bewijs dat de boogtangensfunctie $\text{Bgtan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ afleidbaar is en dat haar afgeleide gelijk is aan $\text{Bgtan} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Gegeven was ook dat de afgeleide van de tangens gelijk

Vraag 2

- a. Toon aan dat er een reëel getal $2 < x < 3$ bestaat zodat $x^3 = 20 + \sqrt{x}$.
b. Zij $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie, waarvoor geldt dat $f(0) < 0$ en $f(2) > 4$. Toon aan dat er een reëel getal $0 < c < 2$ bestaat zodat $f(c) = c^2$.

Vraag 3

Zij X een niet-lege verzameling waarop d_1 en d_2 twee metrieken zijn. Veronderstel dat $\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ continu is. Zij A een willekeurige deelverzameling.

- a. Noem A_1 de sluiting van A onder d_1 en A_2 de sluiting van A onder d_2 . Toon aan dat $A_1 \subseteq A_2$.
b. Als (X, d_1) compact is, is (X, d_2) dat dan ook? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
c. Als (X, d_2) compact is, is (X, d_1) dat dan ook? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.