Herexamen Kans en stat II

Augustus 2021

1 Theoriegedeelte

1. Zijn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijke stochastische veranderlijken met karakteristieke functies $\phi_{X_1}, \ldots, \phi_{X_2}$.
   (a) Geef een uitdrukking voor de karakteristieke functie van de nieuwe stochastische veranderlijke $X_1 + \cdots + X_n$ in termen van de karakteristieke functies van $X_1, \ldots, X_n$.
   (b) Bepaal m.b.v. de karakteristieke functie de verdeling van de som van n χ_1^2-verdeelde stochastische veranderlijken. [Er was een tabel met karakteristieke functies gegeven]

2. Gelden $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ en $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y$. Toon aan dat $X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} XY$.

3. Bewijs Cramér-Rao (in het scalaire geval). De stelling zelf was gegeven.

2 Oefeningengedeelte

1. Zij $U_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$ en $U_2 \sim \Gamma(1, \beta_2)$ waarbij $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 > 0$. [Een tabel met verdelingen was gegeven.]
   (a) Toon aan dat $V = U_1/U_2 \sim \text{Dagum}(\alpha_1, 1, \beta_2/\beta_1)$. De dichtheid van de Dagum(p, a, b)-verdeling is gegeven door
   $$f(x; p, a, b) = \frac{ap}{x}\left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{ap}}{\left(\left(\frac{x}{b}\right)^{a} + 1\right)^{p+1}}\right)$$
   voor $x > 0$.
   (b) Vind een MLE α_1 wanneer β_2/β_1 bekend is.
   (c) Vind de asymptotische verdeling van de schatter gevonden in (b). Je mag veronderstellen dat aan de regulariteitsvoorwaarden voldaan is.

2. Zij X_n een rij van stochastische veranderlijken met dichtheidsfuncties
   $$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 + \sin(2\pi n x) & \text{als } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$
   Laat p_k een naar nul convergerende rij zijn en definieer een rij stochastische veranderlijken Y_n zodat $P[Y_k = 3] = p_k$ en $P[Y_k = 2] = 1 - p_k$.
   (a) Toon aan dat er een S.V. X bestaat zodat $X_n \xrightarrow{\mathrm{D}} X$.
   (b) Toon aan dat er een S.V. Y bestaat zodat $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y$.
   (c) Toon aan dat $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{D}} X + Y$.
   (d) Beschrijf in detail wat de volgende R-code aantoont.