

Herexamen Algebra I 2021-2022

29 augustus 2022

9u00 - 13u00

Door covid duurde het examen 4 uur, waarvan maximaal 90 minuten voor het theorie-deel gebruikt mochten worden.

1 Theorie (gesloten boek)

De stellingen werden gegeven.

1. Bewijs de stelling van Cayley (stelling 1.2.4)
2. Stelling 2.4.10 werd gegeven en je moest de pijl bewijzen die niet gold voor een domein
Geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat die implicatie niet geldt voor een gewoon domein
3. Stelling 3.2.4

2 Oefeningen (open boek)

Vraag 1

Zij G een groep, G wordt meta-cyclisch genoemd als er een normale deelgroep N bestaat zodat N en G/N cyclisch zijn.

- 1) Toon aan dat de Diëdergroep $\mathcal{D}_n$ een meta-cyclische groep is.
- 2) Toon aan dat elke deelgroep van een meta-cyclische groep meta-cyclisch is.

Vraag 2

Zij R een commutatieve ring. De nilradicaal van R wordt gedefiniëerd als:

$$N = \{a \in R \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} : a^n = 0\}.$$

- 1) Toon aan dat N een ideaal is van R .
- 2) Zij P een priemideaal van R , toon aan dat $N \subset P$.
- 3) Toon aan dat het nilradicaal van G/N de nulring is.

Vraag 3

Zij $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ en $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

- 1) Bepaal de minimale veelterm f van α en bepaal $[K : \mathbb{Q}]$
- 2) Toon aan dat K niet het ontbindingsveld is van α over $\mathbb{Q}$ (hint: toon aan dat f wortels heeft niet in $\mathbb{R}$)
- 3) Zij E het ontbindingsveld van α over $\mathbb{Q}$, bepaal $[E : \mathbb{Q}]$.

Vraag 4

Zij $X^4 - 2X^3 + X^2$ de minimale veelterm van A in $\mathbb{C}^{4 \times 4}$. Bepaal de Jordenvormen bij A en A^3 .