

Calculus I - Herexamen

21/08/2021

Woord vooraf

Examen bevat leerstof van heel het opleidingsonderdeel Calculus I. Je kreeg 3 uur de tijd en mocht het formularium en één A4-blad (voor en achterkant beschreven) meenemen. Een rekenmachine was niet toegestaan.

Vraag 1 (1 + 3 punten)

Een mier begeeft zich op een vlak met volgende temperatuursverdeling:

$$T = 2x^2 + y^2$$

Initieel bevindt de mier zich in het punt $(1, 2)$.

- a) Welke verandering in temperatuur T kan de mier ondervinden als het zo snel mogelijk probeert af te koelen en voortbeweegt aan een constante snelheid v ?
- b) De mier volgt dit pad van maximale afkoeling vanaf zijn beginpunt tot in de oorsprong. Dit pad wordt beschreven door de curve

$$y = 2\sqrt{x}.$$

Bereken de lengte van dit pad. Geef je berekeningen weer.

Vraag 2 (2 + 2 punten)

- a) Bereken de oppervlakte van het omwentelingslichaam bekomen door de kromme

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$$

te wentelen om de x -as voor $y \in [1, e]$.

- b) Bereken de integraal

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{4\cos x - 1}} dx.$$

Vraag 3: Optimalisatie (3 punten)

Je kijkt in een vliegtuigshow naar een vliegtuig dat met een snelheid van 540 km/u voorbijvliegt. Wanneer het vliegtuig het dichtst bij jou is, bevindt het zich op een afstand van 600 m van jou.

Wat is de maximale verandering van de hoek θ in functie van de tijd t tussen de radiële lijn (waarlangs je naar het vliegtuig kijkt) en de loodlijn vanuit jou ooghoek op de rechte lijn die het vliegtuig aflegt?

Wanneer is deze verandering maximaal?

Vraag 4 (2 punten)

Beschouw de functie

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x^n}.$$

Bespreek de grafiek van deze functie voor $x \geq 0$. Bespreek vervolgens het limietgedrag rond $x = 1$.

Vraag 5 (2 + 1 punten)

a) Bepaal het convergentieinterval van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-2}.$$

b) Evalueer de reeks in $x = 0$. Je kunt hiervoor gebruiken dat $\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n-1)}$.

Vraag 6 (2 + 2 punten)

a) Toon aan dat de raaklijn aan een hyperbool in een willekeurig punt (x_0, y_0) beschreven kan worden door de vergelijking

$$b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2.$$

Gebruik hiervoor de algemene vergelijking van een hyperbool:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Toon aan dat het raakpunt van de hyperbool exact halweg ligt tussen de snijpunten van die raaklijn met de asymptoten.

Definitieve antwoorden

Deze antwoorden zijn door de prof en assistenten gedeeld op het platform ANS.

- 1) a) Snelste afkoeling in richting $-\nabla T$.
 $-\nabla T(x, y) = -(4x\hat{i} + 2y\hat{j})$ en $-\nabla T(1, 2) = -4\hat{i} - 4\hat{j}$
richtingsafgeleide: $\frac{-\nabla T(1,2)}{|-\nabla T(1,2)|} \nabla T(1, 2) \cdot v = -\sqrt{32} \cdot v = -4\sqrt{2} \cdot v$
Of tweede methode: $\frac{dT}{dt} = -v|\nabla T| = -v\sqrt{16x^2 + 4y^2}$
- b) Bereken de integraal $\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$ door middel van volgende substitutie: $u = \sqrt{x}$ of $x = \sinh^2 t$.
Uitkomst: $\sqrt{2} + \ln 1 + \sqrt{2}$ of $\sqrt{2} + \arcsin 1$ (opmerking: $\ln 1 + \sqrt{2} = \arcsin 1$)
- 2) a) Je mag x en y herbenoemen en oplossen: $S = 2\pi \int_1^e |x| \sqrt{(1 + (y'(x))^2)} dx = 2\pi \int_1^e \frac{1}{2}(x^2 + 1) dx = \pi(\frac{1}{3}e^3 + e - \frac{4}{3})$.
- b) $-\frac{1}{4}(\frac{1}{3}\sqrt{4\cos x - 1})^3 + \sqrt{4\cos x - 1} + C$
- 3) $\theta(t) = \arctan \frac{x(t)}{y(t)}$, en $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{x^2(t)}{y^2(t)}} \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{y^2(t)}$
Maximale verandering = 900 rad/u als $t = 0$ u. Komt voor wanneer vliegtuig het dichtst bij de waarnemer is en de radiële lijn samenvalt met de loodlijn.
- 4) Voor $x = 0$: $y(x) = 0$, voor $0 < x < 1$: $y(x) = x$, voor $x > 1$: $y(x) = 0$.
 $y(1) = 1/2$.
De linker- en rechterlimiet voor x gaande naar 1 zijn verschillend, dus de limiet voor x gaande naar 1 van $y(x)$ bestaat niet.
- 5) a) Verhoudingstest: $L = 1$ dus $R = L^{-1} = 1$
In randpunten: bv. vergelijken met atenerende reeks waarvan je weet dat ze convergeert.
Convergentie interval: $[\frac{-1}{\sqrt{3}} - 1; \frac{-1}{\sqrt{3}} + 1]$
(Je kan de reeks ook herschrijven als $-\frac{\arctan^{-1} x + \sqrt{3}^{-1}}{x + \sqrt{3}^{-1}}$ gebruikmakend van de Maclaurinreeks voor $\arctan^{-1}(x)$).
- b) $-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
- 6) a) Toepassen van formule $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ door impliciet af te leiden naar x en bijvoorbeeld x^2 te vervangen met de algemene formule van de hyperbool.
- b) Asymptoten zijn $y = \pm \frac{b}{a}x$
Asymptoten invullen in vergelijking uit (6a): $b^2x_0x - a^2y_0(\pm \frac{b}{a}x) = a^2b^2$

De x -coördinaten van de snijpunten van de verticale raaklijnen met de asymptoten zijn: $x_{1,2} = \frac{a^2 b}{bx_0 \pm ay_0}$

De y -coördinaten zijn: $y_{1,2} = \pm \frac{ab^2}{bx_0 \mp ay_0}$

Als we het middelpunt berekenen vinden we: $\frac{x_1+x_2}{2} = x_0$ en $\frac{y_1+y_2}{2} = y_0$