Meetkunde I
22 augustus 2022

Theoriegedeelte

Vraag 1 [4 punten] Stelling van Pappus.

(a) Definieer een affiene transformatie.

(b) Definieer een dilatatie.

(c) De stelling van Pappus is gegeven. Bewijs deze stelling synthetisch.[1]

Vraag 2 [4 punten] Zij $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ een booglengtegeparametriseerde vlakke kromme.

(a) Geef en bewijs de formules van Frenet voor een vlakke kromme.

(b) Definieer een spiraalboog.

(c) Toon het Lemma van Kneser aan: $\overline{B_b} \subseteq B_a$. Leg de gebruikte symbolen uit.

Oefeningengedeelte

Vraag 3 [4 punten]

(a) Zij l en l' twee verschillende snijdende rechten in $\mathbb{E}^2$. Noem R_l en $R_{l'}$ de spiegelingen in de rechten l en l' respectievelijk. De samenstelling $R_{l'} \circ R_l$ is opnieuw een isometrie. Welke? Toon aan.

(b) Beschouw een driehoek ABC, waarbij α de hoek is bij het hoekpunt A, β bij B en γ bij C. Noteer de rotatie over een hoek 2α rond A met Rot_A. Noteer Rot_B voor de rotatie over 2β rond B en Rot_C voor de rotatie over 2γ rond C. Nu was de vraag in de aard van welke soort isometrie is de samenstelling $\mathrm{Rot}_A \circ \mathrm{Rot}_B \circ \mathrm{Rot}_C$.

[1] Mondelinge toelichting: Als je een eerder resultaat gebruikt uit de cursus moet je dit resultaat niet bewijzen maar wel duidelijk noteren hoe je het gebruikt. Er was niet vermeld dat de drie rechten uit de stelling snijden, dus je moest zowel het geval van snijdende als van parallelle rechten uitwerken

Vraag 4 [6 punten]

(a) Zij l_1 en l_2 twee verschillende rechten in $\mathbb{R}P^3$ die elk de drie kruisende rechten a, b en c snijden. Toon aan dat l_1 en l_2 kruisend zijn.

(b) Oefening waarbij je als hint de transversaliteitseigenschap kon gebruiken.

Vraag 5 [2 punten] Toon aan dat volgende formules gelden:

$$\begin{pmatrix} \beta' \\ \beta'' \\ \beta' \times \beta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\kappa} & \tau \\ 0 & -\tau & \frac{\kappa'}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta' \\ \beta'' \\ \beta' \times \beta'' \end{pmatrix}.$$