Herexamen Meetkunde II 2016

September 1, 2017

1 Theorie: Mondeling gedeelte

1. (a) Wat is de dimensie van de complexe vectorruimte van alle homogene veeltermen van graad 2 in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$?

   (b) Leg uit dat de verzameling $\mathcal{K}$ van alle kegelsneden in $\mathbb{C}P^2$ de structuur heeft van een projectieve ruimte en bepaalde dimensie.

   (c) Toon aan dat de kegelsneden door E_0, E_1 en E_2, die raken in E_2 aan de rechte $x_0 + x_1 = 0$ een ééndimensionale projectieve deelriumte van $\mathcal{K}$ vormen. Dit wordt een kegelsnedenbundel genoemd.

   (d) Gebruik de kegelsnedenbundel uit de vorige vraag om aan te tonen dat de kromme

   $$\mathcal{C} \leftrightarrow (x_0^2 + x_1^2)^2 x_2^2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0^2 x_1^2 = 0$$

   in $\mathbb{C}P^2$ rationaal is en om een rationale parametervoorstelling van $\mathcal{C}$ te berekenen.

2. Gegeven M een samenhanged oppervlak in $\mathbb{E}^3$.

   (a) Definieer de hoofdkromming $k_1, k_2 : M \to \mathbb{R}$ met behulp van normale doorsneden.

   (b) Toon aan dat k_1 en k_2 continu zijn op heel M en afleidbaar zijn in niet ombilicale punten van M.

   (c) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld

   $$k_1 + k_2 \equiv 0 \to k_1 \text{ en } k_2 \text{ constant}$$
   $$k_1 - k_2 \equiv 0 \to k_1 \text{ en } k_2 \text{ constant}$$

2 Oefeningen

1. Gegeven zijn de driekhoek $\triangle PQR$ in $\mathbb{R}P^2$ en een punt S buiten de zijden van deze driehoek.

Zij l harmonisch toegevoegd aan PS ten opzichte van $\{PQ, PR\}$, m harmonisch toegevoegd aan QS ten opzichte van $\{PQ, QR\}$ en n harmonisch toegevoegd aan RS ten opzichte van $\{PR, QR\}$. Toon aan dat de snijpunten $l \cap QR$, $m \cap PR$ en $n \cap PQ$ collineair zijn.

2. Beschouw $y^2(x^2-1)+(x^2+2y-1)^2=0$.

   (a) Bepaal de meervoudige punten en de hoofdraaklijn

   (b) Toon aan dat $\forall(x,y)$ op de kromme geldt dat $-1 \leq x \leq 1$ en $0 \leq y \leq 1$.

   (c) Schets de kromme en geef alle extra berekeningen die je nodig hebt om tot deze schets te komen.

3. $M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \quad \middle| \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \right\}$ met $a,b,c \in \mathbb{R}_0$.

   (a) Toon aan door één specifiek punt S weg te laten uit M, dat $N = M \backslash S$ een oppervlak is.

   (b) Toon aan dat N plat is.

   (c) Toon aan of weerleg: $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ is een differentieerbare bijectieve afbeelding zodanig dat het beeld van N onder ϕ opnieuw plat is, dan is ϕ een isometrie van $\mathbb{E}^3$.