Herexamen lineaire algebra

28 augustus 2018

Vraag 1 (10 pnt)

Vul de volgende stelling aan en bewijs.
$dim(U \cap V) + dim(...) = dim(U) + dim(V)$

Vraag 2 (5 pnt)

Bewijs dat λ een wortel van de karakteristieke veelterm is. *(Hier waren nog enkele kleine randvoorwaarden bij, maar dit is dus waar de vraag op neerkomt)*

Vraag 3 (10 pnt)

Waar of fout? Argumenteer nauwkeurig.

3a

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een vierkante matrix. Dan geldt dat A symmetrisch is als en slechts als de rijruimte R(A) gelijk is aan de kolomruimte C(A).

3b

Zij $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een isomorfisme. Bekijk vectoren in $\mathbb{R}^n$ als kolomvectoren. Dan is $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \psi(X)^T Y$ een inproduct op de vectorruimte $\mathbb{R}^n$.

3b

Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonaliseerbare matrices. Dan is ook $A + B$ diagonaliseerbaar.

Vraag 4 (10 pnt)

Zij $a \in \mathbb{R}$ en

$$L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 2a & 4a & y \\ 3 & 6a^2 & z \end{pmatrix}.$$

4a

Bewijs dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ L_a een lineaire afbeelding is.

4b

Bepaal voor $\ker(L_a)$ en $\mathrm{Im}(L_a)$ een basis en de dimensie in functie van a.

Vraag 5 (10 pnt)

Definieer de lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3} : A \mapsto A^T$. Definieer de deelruimte van $\mathbb{R}^{3\times3}$ gegeven door $U := \{A \in \mathbb{R}^{3\times3}|$A is symmetrisch$\}$ en $W := \{A \in \mathbb{R}^{3\times3}|$A is scheefsymmetrisch$\}$.

5a

Bewijs dat 1 en -1 eigenwaarden zijn van L en dat U gelijk is aan de eigenruimten E_1 en W gelijk is aan de eigenruimte E_{-1}.

5b

Bereken dim(U) en dim(W).

5c

Bewijs dat L diagonaliseerbaar is. Geef de karakteristieke veelterm $\phi_L(X)$ van L.