

# Formularium Wiskunde

Te gebruiken bij examen Inleiding tot de Hogere Wiskunde

## 1 Transcendente functies

### 1.1 Goniometrische functies

$$\tan x = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

|                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$<br>$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$<br>$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$<br>$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | $\sin p + \sin q = 2 \sin(\frac{1}{2}(p+q)) \cos(\frac{1}{2}(p-q))$<br>$\sin p - \sin q = 2 \cos(\frac{1}{2}(p+q)) \sin(\frac{1}{2}(p-q))$<br>$\cos p + \cos q = 2 \cos(\frac{1}{2}(p+q)) \cos(\frac{1}{2}(p-q))$<br>$\cos p - \cos q = -2 \sin(\frac{1}{2}(p+q)) \sin(\frac{1}{2}(p-q))$ |
| $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$<br>$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$                                                                                                                                       | $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$<br>$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$                                                                                                                                                                                                                              |

$$\operatorname{dom} \operatorname{bgsin} = [-1, 1] \quad \operatorname{dom} \operatorname{bgcos} = [-1, 1] \quad \operatorname{dom} \operatorname{bgtan} = \mathbb{R}$$

### 1.2 Exponentiële functie en Logaritme

|                     |                           |                       |                                  |
|---------------------|---------------------------|-----------------------|----------------------------------|
| $e^{x+y} = e^x e^y$ | $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ | $e^{x-y} = e^x / e^y$ | $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$       |
| $e^{xy} = (e^x)^y$  | $\ln(x^y) = y \ln x$      | $a^x = e^{x \ln a}$   | $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ |

### 1.3 Hyperbolische functies

|                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$<br>$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$<br>$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | $\operatorname{bgsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$<br>$\operatorname{bgcosh} x = \operatorname{bgsinh}(\sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$<br>$\operatorname{bgtanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ |
| $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                   |

## 2 Differentiaalrekening

### 2.1 Rekenregels

Definitie:  $Df(x) = f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettingregel:  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Afgeleide van inverse functie:  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

### 2.2 Overzicht van afgeleiden

| $y = f(x)$               | $dy/dx = f'(x)$                     |  | $y = f(x)$               | $dy/dx = f'(x)$                       |
|--------------------------|-------------------------------------|--|--------------------------|---------------------------------------|
| $ax^n$                   | $anx^{n-1}$                         |  | $a$                      | $0$                                   |
| $a^x$                    | $a^x \ln a$                         |  | $e^x$                    | $e^x$                                 |
| $\log_a x$               | $\frac{1}{x \ln a}$                 |  | $\ln x$                  | $\frac{1}{x}$                         |
| $\sin x$                 | $\cos x$                            |  | $\cos x$                 | $-\sin x$                             |
| $\tan x$                 | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ |  | $\cot x$                 | $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ |
| $\sec x$                 | $\sec x \tan x$                     |  | $\operatorname{cosec} x$ | $-\operatorname{cosec} x \cot x$      |
| $\sinh x$                | $\cosh x$                           |  | $\cosh x$                | $\sinh x$                             |
| $\tanh x$                | $\frac{1}{\cosh^2 x}$               |  | $\operatorname{bgsin} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$              |
| $\operatorname{bgcos} x$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$           |  | $\operatorname{bgtan} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$                     |

## 3 Integraalrekening

### 3.1 Rekenregels

Als  $f$  continu is en  $F' = f$ , dan  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Substitutieregel:  $\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$

Partiële integratie:  $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

### 3.2 Overzicht van integralen

| $y = f(x)$                   | $\int f(x)dx$                        | $y = f(x)$               | $\int f(x)dx$                                            |
|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------|
| $ax^n$                       | $a(n+1)^{-1}x^{n+1} + C$             | $\sin x$                 | $-\cos x + C$                                            |
| $\frac{1}{x}$                | $\ln x  + C$                         | $\cos x$                 | $\sin x + C$                                             |
| $e^x$                        | $e^x + C$                            | $\tan x$                 | $-\ln \cos x  + C$                                       |
| $a^x$                        | $\frac{a^x}{\ln a} + C$              | $\sec x$                 | $\ln \sec x + \tan x  + C$                               |
| $\log_a x$                   | $\frac{x \ln x - x}{\ln a} + C$      | $\operatorname{cosec} x$ | $\ln \tan(\frac{1}{2}x)  + C$                            |
| $\ln x$                      | $x \ln x - x + C$                    | $\sinh x$                | $\cosh x + C$                                            |
| $\frac{1}{a^2 + x^2}$        | $(1/a)\operatorname{bgtan}(x/a) + C$ | $\cosh x$                | $\sinh x + C$                                            |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ | $\ln x + \sqrt{a^2 + x^2}  + C_2$    | $\operatorname{bgsin} x$ | $x\operatorname{bgsin} x + \sqrt{1 - x^2} + C$           |
| $\frac{1}{a^2 - x^2}$        | $\frac{1}{2a} \ln (a+x)/(a-x)  + C$  | $\operatorname{bgcos} x$ | $x\operatorname{bgcos} x - \sqrt{1 - x^2} + C$           |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ | $\operatorname{bg sin}(x/a) + C$     | $\operatorname{bgtan} x$ | $x\operatorname{bgtan} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$ |

### 3.3 Goniometrische integralen

De integraal  $\int R(\cos x, \sin x)dx$  met  $R(x, y)$  een rationale functie wordt herleid tot een integraal van een rationale functie door middel van de substitutie

$$t = \tan\left(\frac{1}{2}x\right) \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

De in de tabel aangegeven substitutie leidt tot een integraal van een rationale functie in  $\cos x$  en  $\sin x$ :

|                               |                                                                                  |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\int R(x, \sqrt{x^2 + 1})dx$ | $x = \tan \theta \quad dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$                       |
| $\int R(x, \sqrt{1 - x^2})dx$ | $x = \sin \theta \quad dx = \cos \theta d\theta$                                 |
| $\int R(x, \sqrt{x^2 - 1})dx$ | $x = \frac{1}{\cos \theta} \quad dx = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$ |

### 3.4 Oneigenlijke integraal

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  convergeert als  $p < 1$  en divergeert als  $p \geq 1$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$  convergeert als  $p > 1$  en divergeert als  $p \leq 1$

### 3.5 Lengte, oppervlakte en volume

De lengte van een kromme  $K$  is gegeven door:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx & \quad \text{als } K : y = f(x), \quad a \leq x \leq b \\ \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt & \quad \text{als } K : x = f(t), y = g(t), \quad a \leq t \leq b \\ \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta & \quad \text{als } K : r = r(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \end{aligned}$$

De oppervlakte  $S$  van een deel van het vlak ingesloten door de kromme  $r = f(\theta)$  en stralen  $\theta = a$  en  $\theta = b$  is

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta.$$

De oppervlakte  $S$  en het volume  $V$  van het omwentelingslichaam dat ontstaat door  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  te wentelen rond de  $x$ -as zijn

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

## 4 Complexe getallen

Cartesische voorstelling:  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  met  $a = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$  en  $b = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

Poolvoorstelling:  $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  met absolute waarde  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  en argument  $\theta = \arg z$ ,  $\tan \theta = b/a$

Complex toegevoegde:  $\bar{z} = a - bi = re^{-i\theta} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$

Verband tussen goniometrische functies en complexe  $e$ -macht:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Rekenregels:

|                                                                    |                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(a + bi) \pm (c + di) = a \pm c + i(b \pm d)$                     |                                                                                            |
| $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$                        | $(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$            |
| $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$ | $\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ |

## 5 Reeksen

### 5.1 Speciale reeksen

Binomium van Newton:  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ , waarin  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Meetkundige reeks:  $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ , en voor  $|r| < 1$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$

Twee bijzondere reeksen:  $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$  en  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

### 5.2 Convergentiekenmerken

Als  $\sum_n |u_n|$  convergeert, convergeert  $\sum_n u_n$  ook.

Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$  divergeert  $\sum_n u_n$ .

Een alternerende reeks waarvan de termen in absolute waarde monotoon tot 0 naderen is convergent (Leibniz).

Als  $f$  dalend is en  $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$  dan convergeert  $\sum_n f(n)$ .

De reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  is convergent als  $p > 1$  en divergent als  $p \leq 1$ .

Als  $0 \leq u_n \leq C v_n$  met  $C > 0$ , en  $\sum_n v_n$  convergeert, dan convergeert  $\sum_n u_n$  ook.

Wanneer  $L$  gegeven wordt door  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}$  of door  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ , dan is  $\sum_n u_n$  divergent als  $L > 1$  en convergent als  $L < 1$ .

### 5.3 Machtreeksen

Wanneer  $\rho$  gegeven wordt door  $\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  of door  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ , dan is  $\rho$  de convergentiestraal van  $\sum_n c_n x^n$ .

Voorbeelden van machtreeksen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

### 5.4 Taylorreeksen

Formule van Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

Restterm:  $R_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Afschatting:  $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max |f^{(n+1)}(t)|$  waarbij het maximum genomen wordt

voor  $t$  tussen  $a$  en  $x$   
 Taylorreeks:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

Voorbeelden

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{als } x \in ]-1, 1]$$

$$\text{bgtan } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{als } x \in [-1, 1]$$

$$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n \quad \text{als } x \in ]-1, 1[ \quad \text{waarin } \binom{s}{n} = \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}$$

## 6 Functies van meer veranderlijken

### 6.1 Vectoren

Norm:  $\|\vec{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$

Scalair product:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$  met  $\theta$  de hoek tussen  $\vec{x}$  en  $\vec{y}$

Cauchy Schwarz:  $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

### 6.2 Vectorfunctie

Vectorfunctie  $\vec{c}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \vec{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$

Afgeleide vectorfunctie (vectoriële snelheid):  $v(t) = \vec{c}'(t) = (c'_1(t), c'_2(t), \dots, c'_n(t))$

Lengte van kromme geparametriseerd door  $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$L = \int_a^b \|\vec{c}'(t)\| dt = \int_a^b (c'_1(t)^2 + \cdots + c'_n(t)^2)^{1/2} dt$$

### 6.3 Afgeleiden

Partiële afgeleiden naar  $x_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_k) - f(\vec{x})}{h} \end{aligned}$$

Gradiënt van  $f$ :  $\text{grad } f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

Richtingsafgeleide in richting  $\vec{a} \neq 0$ :  $D_{\vec{a}}f = \text{grad } f \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

Kettingregel:  $\frac{d}{dt}(f \circ \vec{c})(t) = \text{grad } f(\vec{c}(t)) \cdot \vec{c}'(t)$

Raakvlak aan niveauoppervlak van  $f$  door  $\vec{p}$ :  $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \text{grad } f(\vec{p}) = 0$

Raakvlak aan grafiek van  $f$  in  $(\vec{p}, f(\vec{p}))$ :  $x_{n+1} = f(\vec{p}) + (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \text{grad } f(\vec{p})$

## 6.4 Extrema

Een continue functie  $f$  bereikt op een gesloten en begrensd deel  $S$  van  $\mathbb{R}^n$  een globaal maximum en een globaal minimum.

Kandidaten voor extrema:

1. Punten waar  $f$  niet differentieerbaar is,
2. Punten waar  $\text{grad } f = 0$ ,
3. Punten van de rand van  $S$ .

Hessiaan van  $f$ :

$$H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Extremum van  $f$  onder nevenvoorwaarde  $h = 0$  kan gevonden worden als kritiek punt van

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda h(x_1, \dots, x_n)$$

met Lagrange multiplicator  $\lambda$ .

## 6.5 Meervoudige integralen

Als  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ , dan

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Als  $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ , dan

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Oppervlakte van  $D \subset \mathbb{R}^2$ :  $\iint_D dx dy$

Als  $D = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$ , dan

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[ \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx$$

Volume van  $D \subset \mathbb{R}^3$ :  $\iiint_D dx dy dz$

Transformatie  $(u, v) \in D' \mapsto (x, y) = (x(u, v), y(u, v)) \in D$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

met Jacobiaan:

$$J(u, v) = \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Poolcoördinaten  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ :  $J(r, \theta) = r$

## 7 Differentiaalvergelijkingen

### 7.1 Scheiding van veranderlijken

Als  $\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$ , dan

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt + C.$$

### 7.2 Lineaire eerste orde differentiaalvergelijking

$x'(t) + a(t)x(t) = f(t)$  heeft oplossing  $x(t) = x_P(t) + x_H(t) = u(t)v(t) + Cu(t)$  met

$$u(t) = \exp \left( - \int a(t) dt \right) \quad \text{en} \quad v(t) = \int \frac{f(t)}{u(t)} dt$$

### 7.3 Tweede orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

Homogene vergelijking:  $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$

Karakteristieke vergelijking:  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  met oplossingen  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$

Als  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , dan  $x_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

Als  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , dan  $x_H(t) = (A + Bt)e^{\lambda_1 t}$

Als  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega \notin \mathbb{R}$ , dan  $x_H(t) = e^{\mu t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$

Niet-homogene vergelijking:  $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$

Oplossing:  $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

Particuliere oplossing  $x_P(t)$  proberen aan de hand van tabel

| Rechterlid $f(t)$                                        | Probeer $x_P(t)$                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Veelterm van graad $n$                                   | $c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n$                                                                              |
| $e^{\mu t}$                                              | $C e^{\mu t}$                                                                                                      |
| $\cos(\omega t)$ of $\sin(\omega t)$                     | $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$                                                                              |
| $t^n e^{\mu t}$                                          | $(c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n) e^{\mu t}$                                                                  |
| $t^n \cos(\omega t)$ of $t^n \sin(\omega t)$             | $(a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n) \cos(\omega t)$<br>$+ (b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots + b_n) \sin(\omega t)$ |
| $e^{\mu t} \cos(\omega t)$ of $e^{\mu t} \sin(\omega t)$ | $A e^{\mu t} \cos(\omega t) + B e^{\mu t} \sin(\omega t)$                                                          |