

Examen Wiskunde I
1ste fase bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie en Informatica
Schakelprogramma Master Chemie en Master Toegepaste Informatica
maandag 13 januari 2014, 9:00–13:00
Auditorium G.00.01 en G.00.06

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 5 vragen. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag de cursustekst en een rekenmachine (niet-symbolisch) gebruiken.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
Vraag 1: (a) 10 pt
Vraag 2: (a) 3 pt (b) 4 pt (c) 3 pt
Vraag 3: (a) 2 pt (b) 4 pt (c) 4 pt
Vraag 4: (a) 6 pt (b) 4 pt
Vraag 5: (a) 3 pt (b) 3 pt (c) 4 pt
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

Antwoord:

Vraag 2 (a) Gebruik de hoofdstelling van de integraalrekening om de afgeleide $F'(t)$ van de functie

$$F(t) = \int_t^\infty \frac{x-4}{(x^2+4)(x+1)} dx, \quad t \geq 0$$

te berekenen. Bepaal waar F stijgend en dalend is.

(b) Bereken de oneigenlijke integraal

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{x-4}{(x^2+4)(x+1)} dx$$

en laat zien dat $F(0) < 0$.

(c) Bereken het maximum en minimum van F voor $t \geq 0$, waarbij u mag gebruiken dat $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 We nemen $f(\theta) = (1+\theta)\sqrt{\cos \theta}$. Zij $\mathcal{K}$ de kromme die in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$\mathcal{K} : r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

- (a) Schets de kromme $\mathcal{K}$.
- (b) Bereken de oppervlakte van het gebied dat omsloten wordt door $\mathcal{K}$ en de x -as.
- (c) Bereken de tweedegraads Taylorveelterm van $f(\theta)$ rond $\theta = 0$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 (a) Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = e^{\omega t}$$

met $\omega \in \mathbb{R}$.

(b) Geef de speciale oplossing die voldoet aan $x(0) = 0$ en $x'(0) = 0$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 (a) Bereken het globale minimum van de functie

$$f(x, y) = (x^2 + (y + 1)^2) (x^2 + (y - 1)^2)$$

U kunt dit doen zonder enig rekenwerk.

(b) Bereken de partiële afgeleiden en de stationaire punten van f .

(c) We zoeken de extrema van f onder de nevenvoorwaarde $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.

Laat zien dat de methode van Lagrange leidt tot de vergelijkingen

$$2x(x^2 + y^2 + 1) = \lambda(x - 1)$$

$$2y(x^2 + y^2 - 1) = \lambda y$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2$$

en gebruik dit om het maximum en het minimum van f onder de nevenvoorwaarde te vinden.

Antwoord: