Examen Wiskunde I
Bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie en Informatica
Schakelprogramma Master Chemie en Toegepaste Informatica
maandag 12 januari 2015, 9:00–13:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 5 vragen. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- U mag de cursustekst en een rekenmachine (niet-symbolisch) gebruiken.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 7 pt	
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 6 pt	
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	
Vraag 4:	(a) 4 pt	(b) 6 pt	
Vraag 5:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Deze vraag gaat over de formule

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \left(an^2 + bn + c\right)$$

(a) Vind a, b en c zodanig dat de formule klopt voor $n = 0$, $n = 1$ en $n = 2$.

(b) Neem de waarden $a = 1/2$, $b = 1/2$ en $c = 0$ en bewijs met volledige inductie dat de formule klopt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Antwoord:

(a) Voor $n = 0$ is het linkerlid van de formule

$$LL = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k k^2 = (-1)^0 0^2 = 0$$

en het rechterlid is

$$RL = (-1)^0(a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c) = c.$$

We vinden voor $n = 0$ dus de vergelijking

$$0 = c.$$

Analoog vinden we voor $n = 1$ de vergelijking

$$-1 = -(a + b + c)$$

en voor $n = 2$ is de vergelijking

$$3 = 4a + 2b + c.$$

Dit stelsel van drie vergelijkingen en drie onbekenden heeft als oplossing

$$a = 1/2, \qquad b = 1/2, \qquad c = 0.$$

(b) We gebruiken het principe van volledige inductie om te bewijzen dat

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Basisstap: De formule klopt voor $n = 0$, dit hebben we in (a) al aangetoond.

Inductiestap: Neem aan dat de formule klopt voor een zeker natuurlijk getal $p \in \mathbb{N}$. dus dat

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^2 = (-1)^p \frac{p(p+1)}{2}.$$

We moeten bewijzen dat de formule dan ook klopt voor $p+1$. Dus we moeten bewijzen dat

$$\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{p+1} \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

geldt. We hebben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^2 + (-1)^{p+1}(p+1)^2 \\
&\overset{IH}{=} (-1)^p \frac{p(p+1)}{2} + (-1)^{p+1}(p+1)^2 \\
&= (-1)^{p+1} \frac{-p(p+1)}{2} + (-1)^{p+1}(p+1)^2 \\
&= (-1)^{p+1}(p+1)\left(\frac{-p}{2} + (p+1)\right) \\
&= (-1)^{p+1}(p+1)\left(\frac{p+2}{1}\right) \\
&= (-1)^{p+1} \frac{(p+1)(p+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Bijgevolg is de inductiestap bewezen.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt de formule voor elke $n \in \mathbb{N}$ vanwege het principe van volledige inductie.

Naam:

Vraag 2 (a) Gebruik de hoofdstelling van de integraalrekening om de afgeleide $F'(t)$ van de functie

$$F(t) = \int_1^{t^2} \frac{x-p}{x^2(x+2)}\, dx, \quad t > 0$$

te berekenen. Hierin is $p > 0$ een vast gekozen constante. Bepaal waar F stijgend en dalend is.

(b) Bereken $\lim_{t \to +\infty} F(t)$. Als dit niet lukt met algemene p, neem dan $p = 2$.

Antwoord:

(a) Wegens Stelling 6.4.4 (hoofdstelling van de integraalrekening plus de kettingregel) is

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt}\int_1^{t^2} \frac{x-p}{x^2(x+2)}\, dx \\ &= \frac{t^2-p}{t^4(t^2+2)} \cdot 2t \\ &= \frac{2t(t^2-p)}{t^4(t^2+2)} \\ &= \frac{2(t^2-p)}{t^3(t^2+2)}. \end{aligned}$$

De afgeleide heeft nulpunten in $t = \pm\sqrt{p}$. Het tekenverloop voor $t > 0$ is

	0	$\sqrt{p}$	
$F'(t)$	$-$	0	$+$
$F(t)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Bijgevolg is F stijgend op het interval $]0, \sqrt{p}[$ en dalend op $]\sqrt{p}, +\infty[$.

(b) We splitsen de integrand in partieelbreuken:

$$\frac{x-p}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2}.$$

Dit leidt tot

$$A(x+2) + B(x^2+2x) + Cx^2 = x - p$$

ofwel

$$(B+C)x^2 + (A+2B)x + 2A = x - p.$$

Door coëfficiënten van gelijke machten van x hierin gelijk te stellen, vinden we drie vergelijkingen

$$B + C = 0, \qquad A + 2B = 1, \quad \text{en} \quad 2A = -p.$$

Dus is
$$A = -\frac{p}{2}, \quad \text{en} \quad B = \frac{1-A}{2} = \frac{2+p}{4} \quad \text{en} \quad C = -B = -\frac{2+p}{4}.$$
De integraal kunnen we nu uitrekenen

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_1^{t^2} \frac{x-p}{x^2(x+2)}\,dx \\
&= -\frac{p}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{2+p}{4}\int_1^{t^2} \frac{1}{x}\,dx - \frac{2+p}{4}\int_1^{t^2} \frac{1}{x+2}\,dx \\
&= \frac{p}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_1^{t^2} + \frac{2+p}{4}\left[\ln|x|\right]_1^{t^2} - \frac{2+p}{4}\left[\ln|x+2|\right]_1^{t^2} \\
&= \frac{p}{2t^2} - \frac{p}{2} + \frac{2+p}{4}\ln(t^2) - \frac{2+p}{4}\ln(t^2+2) + \frac{2+p}{4}\ln(3) \\
&= \frac{p}{2t^2} - \frac{p}{2} + \frac{2+p}{4}\big(\ln(t^2) - \ln(t^2+2)\big) + \frac{2+p}{4}\ln(3) \\
&= \frac{p}{2t^2} - \frac{p}{2} + \frac{2+p}{4}\ln\left(\frac{t^2}{t^2+2}\right) + \frac{2+p}{4}\ln(3).
\end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} F(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{p}{2t^2} - \frac{p}{2} + \frac{2+p}{4}\ln\left(\frac{t^2}{t^2+2}\right) + \frac{2+p}{4}\ln(3)\right) \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{p}{2t^2}\right) - \frac{p}{2} + \frac{2+p}{4}\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{t^2}{t^2+2}\right) + \frac{2+p}{4}\ln(3) \\
&= 0 - \frac{p}{2} + \frac{2+p}{4}\ln(1) + \frac{2+p}{4}\ln(3) \\
&= -\frac{p}{2} + \frac{2+p}{4}\ln(3).
\end{aligned}$$

Als $p = 2$, wordt dit dus $-1 + \ln(3)$.

Naam:

Vraag 3 (a) Laat zien dat voor $0 \le c \le 1$ geldt

$$\int_0^1 |x^2 - c|\, dx = \frac{4}{3}c^{3/2} - c + \frac{1}{3}$$

en gebuik dit om het globale maximum en minimum van de functie

$$M(c) = \int_0^1 |x^2 - c|\, dx, \qquad c \in [0,1]$$

te berekenen.

(b) Bereken de derdegraads Taylorveelterm van $M(c)$ rond $c = 1$.

Antwoord:

(a) Merk op dat $0 \le c < 1$ en dus

$$|x^2 - c| = \begin{cases} c - x^2 & \text{als } 0 \le x \le \sqrt{c}, \\ x^2 - c & \text{als } \sqrt{c} \le x \le 1. \end{cases}$$

Bijgevolg is de gevraagde integraal gelijk aan

$$\int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2)\, dx + \int_{\sqrt{c}}^1 (x^2 - c)\, dx$$

We berekenen

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2)\, dx &= \left[cx - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{c}} \\ &= c^{3/2} - \frac{c^{3/2}}{3} - 0 \\ &= \frac{2}{3}c^{3/2} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{c}}^1 (x^2 - c)\, dx &= \left[\frac{x^3}{3} - cx \right]_{\sqrt{c}}^1 \\ &= \frac{1}{3} - c - \frac{c^{3/2}}{3} + c^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}c^{3/2} - c + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Het totaal is inderdaad

$$M(c) = \frac{4}{3}c^{3/2} - c + \frac{1}{3}$$

zoals gevraagd in de opgave.

De afgeleide is

$$M'(c) = 2c^{1/2} - 1 = 2\sqrt{c} - 1.$$

Het enige nulpunt is $c = \frac{1}{4}$ en het tekenverloop is

	0		$\frac{1}{4}$	1
$M'(c)$		$-$	0	$+$
$M(c)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Er is dus een globaal minimum in $c = \frac{1}{4}$. Dit minimum is

$$M\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{9}{24} = \tfrac{1}{4}.$$

Er zijn verder lokale randmaxima bij $c = 0$ en $c = 1$. Omdat

$$M(0) = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad M(1) = \frac{2}{3}$$

wordt het globale maximum aangenomen voor $c = 1$ en het bedraagt $\frac{2}{3}$.

(b) We vinden achtereenvolgens

$$\begin{aligned} M(c) &= \frac{4}{3}c^{3/2} - c + \frac{1}{3}, \\ M'(c) &= 2c^{1/2} - 1, \\ M''(c) &= c^{-1/2}, \\ M^{(3)}(c) &= \frac{-1}{2}c^{-3/2}. \end{aligned}$$

We vullen $c = 1$ in en vinden

$$\begin{aligned} M(1) &= \frac{2}{3} \\ M'(1) &= 1 \\ M''(1) &= 1 \\ M^{(3)}(1) &= \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

De gevraagde Taylorveelterm is bijgevolg

$$\begin{aligned} T_3(c) = M(1) + M'(1)(c-1) &+ \frac{M''(1)}{2!}(c-1)^2 + \frac{M^{(3)}(1)}{3!}(c-1)^3 \\ &= \frac{2}{3} + (c-1) + \frac{(c-1)^2}{2} - \frac{(c-1)^3}{12}. \end{aligned}$$

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de oplossing van

$$t\frac{dx}{dt} = x^2 + 1$$

die voldoet aan $x(1) = 1$

(b) Bereken de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 17y = 2e^{-3t}$$

met $y(0) = 2$ en $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Antwoord:

(a) Dit is een differentiaalvergelijking met scheidbare veranderlijken. We herschrijven de DV tot

$$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{dt}{t}.$$

Door te integreren, vinden we

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{dt}{t}.$$

en dus is

$$\text{bgtan}(x) = \ln|t| + C.$$

Uit de beginvoorwaarde $x = 1$ voor $t = 1$ volgt dat $\text{bgtan}(1) = \ln 1 + C$. Dit bepaalt de waarde van C. Omdat $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$ en $\ln 1 = 0$, volgt dat

$$C = \frac{\pi}{4}.$$

We vinden nu de oplossing

$$x = \tan\left(\ln|t| + \frac{\pi}{4}\right).$$

(b) De karakteristieke veelterm van de homogene vergelijking is

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 17$$

en deze heeft discriminant $8^2 - 4 \cdot 17 = 64 - 68 = -4$ en nulpunten

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-4}}{2} = -4 \pm i.$$

Dus $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$ met $\mu = -4$ en $\omega = 1$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dan

$$y_H(t) = (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))\, e^{-4t}.$$

We zoeken vervolgens een particuliere oplossing. We proberen hiervoor $y = Ae^{-3t}$. We hebben dan $y' = -3Ae^{-3t}$ en $y'' = 9Ae^{-3t}$. We vullen in in de DV en vinden zo

$$\begin{aligned} y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3t} \quad &\Leftrightarrow \quad 9Ae^{-3t} - 24Ae^{-3t} + 17Ae^{-3t} = 2e^{-3t} \\ &\Leftrightarrow \quad 2Ae^{-3t} = 2e^{-3t} \\ &\Leftrightarrow \quad A = 1. \end{aligned}$$

Nu is

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))e^{-4t} + e^{-3t}$$

de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking. De constanten c_1 en c_2 worden bepaald door de bijkomende voorwaarden $y(0) = 2$ en $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. Invullen van $t = 0$ en $y(0) = 2$ levert

$$2 = c_1 + 1 \qquad \text{dus } c_1 = 1$$

en invullen van $t = \frac{\pi}{2}$ en $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ levert

$$0 = c_2 e^{-2\pi} + e^{-3\pi/2}$$

hetgeen betekent dat

$$c_2 = -e^{-3\pi/2} \cdot e^{2\pi} = -e^{\pi/2}.$$

Dus is

$$y(t) = (\cos(t) - e^{\pi/2} \sin(t))e^{-4t} + e^{-3t}.$$

Naam:

Vraag 5 De temperatuur in een punt (x, y) van het vlak bedraagt

$$T(x, y) = 8x^2 - 4xy + y^2 - 8x$$

(a) Bepaal de stationaire punten van T en onderzoek voor elk van de stationaire punten of het een lokaal minimum een lokaal maximum of zadelpunt betreft.

(b) Bereken het raakvlak aan de grafiek van $z = T(x, y)$ in het punt $x = y = 1$, $z = -3$.

(c) Een pinguïn overleeft het best op de temperatuur $T = 0$ en waggelt daarom over de niveaukromme $T(x, y) = 0$. Wat is de hoogste en wat is de laagste x-waarde die de pinguïn kan bereiken?

[N.B: Je kunt dit probleem oplossen met de methode van Lagrange.]

Antwoord:

(a) De gradiënt van T is

$$\operatorname{grad} T = (16x - 4y - 8, -4x + 2y).$$

Dit is de nulvector als en slechts als $x = 1$, $y = 2$. Het enige stationaire punt is dus $(1, 2)$. De tweede orde partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 16, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = -4, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2,$$

We berekenen

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)^2 = 16 \cdot 2 - 4^2 = 16 > 0.$$

Uit de tweede afgeleide test besluiten we dan (doordat $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 16 > 0$) dat T een lokaal minimum bereikt in $(1, 2)$.

(b) Het raakvlak aan de grafiek in $(1, 1, -3)$ wordt wegens formule (9.3.14) bepaald door

$$z + 3 = a(x - 1) + b(y - 1)$$

met

$$a = \frac{\partial T}{\partial x}(1, 1) = 4 \qquad b = \frac{\partial T}{\partial y}(1, 1) = -2.$$

Dus

$$z + 3 = 4(x - 1) - 2(y - 1)$$

hetgeen herschreven kan worden tot

$$z = 4x - 2y - 5.$$

(c) Het probleem komt neer op het maximaliseren of minimaliseren van de functie

$$F(x, y) = x$$

onder de nevenvoorwaarde $T(x, y) = 0$. Volgens de methode van Lagrange moeten we het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} &= \lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} &= \lambda \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ T(x, y) &= 0 \end{cases}$$

oplossen. Het stelsel reduceert tot

$$\begin{cases} 1 &= \lambda(16x - 4y - 8) \\ 0 &= \lambda(-4x + 2y) \\ 8x^2 - 4xy + y^2 - 8x &= 0 \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt $\lambda = 0$ of $-4x + 2y = 0$. Voor $\lambda = 0$ heeft de eerste vergelijking echter geen oplossingen. Dus $\lambda = 0$ kan niet en we houden het geval

$$-4x + 2y = 0$$

over. Dan is $y = 2x$. We vullen dat in in de derde vergelijking en vinden

$$8x^2 - 4x \cdot 2x + (2x)^2 - 8x = 0$$

ofwel

$$4x^2 - 8x = 0.$$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen, namelijk $x = 0$ en $x = 2$. De bijbehorende y-waarden zijn $y = 0$ en $y = 4$. De stationaire punten zijn dus $(0, 0)$ en $(2, 4)$. De grootste x-waarde is $x = 2$ en die wordt bereikt in het punt $(2, 4)$. De kleinste x-waarde is $x = 0$ en die wordt bereikt in het punt $(0, 0)$.