Examen Wiskunde I
Bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie en Informatica
Schakelprogramma Master Chemie en Toegepaste Informatica
woensdag 21 januari 2015, 9:00–13:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 5 vragen. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- U mag de cursustekst en een rekenmachine (niet-symbolisch) gebruiken.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 10 pt		
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt
Vraag 4:	(a) 4 pt	(b) 6 pt	
Vraag 5:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Bewijs met volledige inductie dat

$$\int_0^\infty x^n e^{-2x} dx = \frac{n!}{2^{n+1}}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Antwoord:

Basisstap: Voor $n = 0$ geldt

$$\begin{aligned} LL = \int_0^\infty x^0 e^{-2x} dx &= \int_0^\infty e^{-2x} dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{e^{-2b}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Het rechterlid is

$$RL = \frac{0!}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}.$$

De bewering klopt dus voor $n = 0$.

Inductiestap: Neem aan dat de formule klopt voor een zekere $p \in \mathbb{N}$. Dat wil zeggen dat we aannemen dat

$$\int_0^\infty x^p e^{-2x} dx = \frac{p!}{2^{p+1}}$$

geldt. We tonen aan dat hieruit volgt dat

$$\int_0^\infty x^{p+1} e^{-2x} dx = \frac{(p+1)!}{2^{p+2}}. \tag{1}$$

We passen partiële integratie toe met

$$u = x^{p+1}, \quad \frac{dv}{dx} = e^{-2x}$$

zodat

$$\frac{du}{dx} = (p+1)x^p, \quad v = -\frac{e^{-2x}}{2}.$$

Dan volgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{p+1} e^{-2x} dx &= \lim_{b\to+\infty} \left(\int_0^b x^{p+1} e^{-2x} dx \right) \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{e^{-2x}}{2} x^{p+1} \right]_0^b + \frac{p+1}{2} \int_0^b x^p e^{-2x} dx \right) \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{e^{-2b}}{2} b^{p+1} + 0 \right) + \frac{p+1}{2} \int_0^\infty x^p e^{-2x} dx. \end{aligned}$$

We kunnen hierop de inductiehypothese toepassen en vinden

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{p+1}e^{-2x}dx &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-2b}}{2}b^{p+1}\right)+\frac{(p+1)}{2}\frac{p!}{2^p} \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-2b}}{2}b^{p+1}\right)+\frac{(p+1)!}{2^{p+1}}
\end{aligned}$$

De limiet die we nog moeten uitrekenen is gelijk aan 0 want de exponentiële afname in e^{-2b} als $b \to +\infty$ is sterker dan de stijging in de macht b^{p+1}, zie bijvoorbeeld ook blz. 65 van de cursus Wiskunde I. We houden dus over

$$\int_0^\infty x^{p+1}e^{-2x}dx = \frac{(p+1)!}{2^{p+1}}$$

wat te bewijzen was.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt de formule voor elke $n \in \mathbb{N}$ vanwege het principe van volledige inductie.

Naam:

Vraag 2 We bekijken de functie $f(x) = \dfrac{4}{(x+a)(x+4)}$ waarin $0 < a < 4$.

(a) Bereken de maxima en minima van f en geef aan of het lokale of globale extrema zijn. Waar is de functie stijgend en waar is ze dalend?

(b) D is het gebied in het eerste kwadrant van het xy-vlak dat omsloten wordt door de grafiek van f en de rechten $y = f(0)$ en $x = 1$. Schets D voor de waarde $a = 1$.

(c) Neem algemene $0 < a < 4$. Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door D te wentelen **rond de y-as** is gelijk aan

$$2\pi \int_0^1 x(f(0) - f(x))\, dx$$

Dit hoeft u niet te bewijzen. Bereken dit volume.

Als het niet lukt voor algemene a, neem dan $a = 1$.

Antwoord:

(a) We hebben dat

$$f'(x) = \frac{-4((x+4)+(x+a))}{(x+a)^2(x+4)^2} = \frac{-8x-16-4a}{(x+a)^2(x+4)^2}. \tag{2}$$

Het enige nulpunt van de afgeleide is $-\frac{4+a}{2}$ en dat bevindt zich tussen -4 and $-a$:

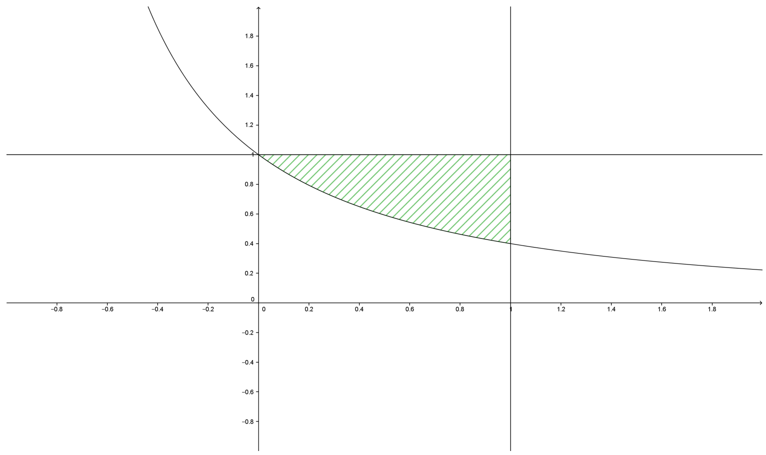
$$-4 < -\frac{4+a}{2} < -a$$

Merk op dat er verticale asymptoten zijn bij $x = -4$ en $x = -a$. De functie en de afgeleide worden oneindig bij deze verticale asymptoten. Door de kwadraten in de noemer in (2) is er evenwel geen tekenverandering voor f' bij deze asymptoten. Het tekenverloop is

	$-\infty$	-4		$-\frac{4+a}{2}$		$-a$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$

Er wordt een lokaal maximum bereikt in $x = -\frac{4+a}{2}$. Het lokale maximum is

$$f\left(-\frac{4+a}{2}\right) = \frac{4}{(-\frac{4+a}{2}+a)(-\frac{4+a}{2}+4)} = \frac{-16}{a^2-8a+16}.$$



Dit is evenwel geen globaal extremum, vanwege de verticale asymptoten.

(b) We hebben dat $f(0) = \frac{1}{a} = 1$. De grafiek van f snijdt de verticale as in $y = 1$. De functie is dalend voor $x \geq 0$ en het gebied D ligt dus **boven** de grafiek (zie schets hierboven).

(c) De integrand is een rationale functie

$$x(f(0) - f(x)) = \frac{x}{a} - \frac{4x}{(x+a)(x+4)}$$

Om te kunnen integreren gaan we de tweede term splitsen in partieelbreuken. We stellen

$$\frac{4x}{(x+a)(x+4)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+4}$$

hetgeen na terugbrengen op gelijke noemer leidt tot

$$4x = A(x+4) + B(x+a) = (A+B)x + 4A + aB$$

We vinden de vergelijkingen

$$A + B = 4, \qquad 4A + aB = 0$$

met als oplossing

$$A = -\frac{4a}{4-a} \qquad B = \frac{16}{4-a}$$

We kunnen nu uitrekenen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(f(0)-f(x))\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{x}{a} - \frac{16}{(4-a)(x+4)} + \frac{4a}{(4-a)(x+a)}\right) dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^1 x\,dx - \frac{16}{4-a}\int_0^1 \frac{1}{x+4}\,dx + \frac{4a}{4-a}\int_0^1 \frac{1}{x+a}\,dx \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{16}{4-a}\left[\ln|x+4|\right]_0^1 + \frac{4a}{4-a}\left[\ln|x+a|\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2a} - \frac{16}{4-a}(\ln 5 - \ln 4) + \frac{4a}{4-a}(\ln(1+a) - \ln(a)) \\
&= \frac{1}{2a} - \frac{16}{4-a}\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{4a}{4-a}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right).
\end{aligned}$$

Voor het eindantwoord moet dit nog vermenigvuldigd worden met 2π. We vinden

$$2\pi\int_0^1 x(f(0)-f(x))\,dx = \pi\left(\frac{1}{a} - \frac{32}{4-a}\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{8a}{4-a}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)$$

Als $a = 1$, wordt dit

$$\pi\left(1 - \frac{32}{3}\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{8}{3}\ln(2)\right).$$

Naam:

Vraag 3 (a) Bereken de raaklijn aan de niveaukromme $x^2 + y^4 = 1$ in het punt

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sqrt{\sin\theta}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

(b) Laat zien dat de raaklijn uit (a) de x-as snijdt in het punt met x coördinaat

$$X(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} - \cos\theta.$$

(c) Bereken de tweedegraads Taylorveelterm van $X(\theta)$ rond $\theta = 0$.

Antwoord:

(a) We stellen $f(x, y) = x^2 + y^4$. Vanwege (9.4.10) wordt de vergelijking van de raaklijn aan de niveaukromme in (x_0, y_0) gegeven door

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

met

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{en} \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

In ons geval is $x_0 = \cos\theta$, $y_0 = \sqrt{\sin\theta}$ en

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 = 2\cos\theta \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 4y_0^3 = 4(\sin\theta)^{3/2} \end{aligned}$$

De vergelijking is dus

$$\cos\theta(x - \cos\theta) + 2(\sin\theta)^{3/2}(y - \sqrt{\sin\theta}) = 0.$$

(b) Als we $y = 0$ invullen in de vergelijking van de raaklijn, krijgen we

$$\cos\theta(x - \cos\theta) + 2(\sin\theta)^{3/2}\left(-\sqrt{\sin\theta}\right) = 0$$

ofwel

$$\cos\theta(x - \cos\theta) = 2\sin^2\theta$$

Hieruit moeten we x oplossen en we vinden

$$X(\theta) = \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta$$

Gebruik nu dat $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta} + \cos\theta \\ &= \frac{2}{\cos\theta} - 2\cos\theta + \cos\theta \\ &= \frac{2}{\cos\theta} - \cos\theta. \end{aligned}$$

(c) We vinden achtereenvolgens

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \frac{2}{\cos\theta} - \cos\theta \\ X'(\theta) &= \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} + \sin\theta \\ X''(\theta) &= \frac{2\cos^3\theta + 4\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta} + \cos\theta \\ &= \frac{2\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \cos\theta. \end{aligned}$$

We vullen $\theta = 0$ in en vinden

$$\begin{aligned} X(0) &= 2 - 1 = 1 \\ X'(0) &= 0 + 0 = 0 \\ X''(0) &= 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

De gevraagde Taylorveelterm is

$$\begin{aligned} T_2(\theta) &= X(0) + X'(0)\theta + \frac{X''(0)}{2!}\theta^2 \\ &= 1 + \frac{3}{2}\theta^2. \end{aligned}$$

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de oplossing van

$$x\frac{dx}{dt} + 1 = t$$

die voldoet aan $x(6) = 3$.

(b) Bereken de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 5t^2 - t$$

met $y(0) = 2$ en $y'(0) = 0$.

Antwoord:

(a) Deze DV kunnen we oplossen met scheiding van veranderlijken. We herschrijven

$$x\,dx = (t-1)\,dt.$$

Door te integreren, vinden we

$$\int x\,dx = \int (t-1)\,dt$$

en dus is

$$\frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} - t + C$$

of nog

$$x^2 = t^2 - 2t + 2C.$$

De voorwaarde $x = 3$ voor $t = 6$ levert ons de constante C. Invullen geeft dat

$$9 = 36 - 12 + 2C$$

en dus is

$$C = \frac{-15}{2}.$$

We vinden nu de impliciete oplossing

$$x^2 = t^2 - 2t - 15$$

met als twee expliciete oplossingen

$$x = \pm\sqrt{t^2 - 2t - 15}.$$

MAAR omdat $x(6) = 3 > 0$, kan $x = -\sqrt{t^2 - 2t - 15}$ geen oplossing zijn die voldoet aan de beginvoorwaarde. De enige oplossing is dus

$$x = \sqrt{t^2 - 2t - 15}.$$

(b) De karakteristieke veelterm van de homogene vergelijking is

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 + 2\lambda + 5$$

en deze heeft discriminant $2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -36$. De nulpunten zijn

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{3}{2}.$$

De algemene oplossing van de homogene DV is

$$y_H(t) = \left(c_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) e^{-\frac{t}{2}}.$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen $y = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$. Dan is $y' = A_1 + 2A_2 t$ en $y'' = 2A_2$. We hebben

$$\begin{aligned} 2y''(t) + 2y'(t) + 5y &= 4A_2 + 4A_2 t + 2A_1 + 5\left(A_0 + A_1 t + A_2 t^2\right) \\ &= 5A_2 t^2 + (4A_2 + 5A_1)\, t + (4A_2 + 2A_1 + 5A_0) \end{aligned}$$

Dit moet gelijk zijn aan $5t^2 - t$ en bijgevolg moet

$$5A_2 = 5, \qquad 4A_2 + 5A_1 = -1, \qquad 4A_2 + 2A_1 + 5A_0 = 0.$$

De oplossing hiervan is $A_2 = 1, A_1 = -1$ en $A_0 = -\frac{2}{5}$.

Nu is

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = \left(c_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) e^{-\frac{t}{2}} - \frac{2}{5} - t + t^2$$

de algemene oplossing van de inhomogene DV.

De constanten c_1 en c_2 volgen uit de beginvoorwaarden.

Invullen van $t = 0$ en $y(0) = 2$ geeft

$$c_1 - \frac{2}{5} = 2 \qquad \text{dus} \qquad c_1 = \frac{12}{5}.$$

We berekenen vervolgens

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(c_1 \left(\frac{-3}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + c_2 \frac{3}{2} \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right) e^{-\frac{t}{2}} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(c_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) e^{-\frac{t}{2}} - 1 + 2t \end{aligned}$$

De afgeleide in $t = 0$ is dan

$$y'(0) = \frac{3}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_1 - 1 = \frac{3}{2}c_2 - \frac{11}{5},$$

want we weten al dat $c_1 = \frac{12}{5}$. De tweede beginvoorwaarde $y'(0) = 0$ levert dus

$$c_2 = \frac{22}{15}.$$

De gevraagde oplossing is

$$y\left(t\right) = \left(\frac{12}{5}\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{22}{15}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)e^{-\frac{t}{2}} - \frac{2}{5} - t + t^2.$$

Naam:

Vraag 5 (a) Bereken de stationaire punten van

$$f(x,y) = (x - y + 1)\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

(b) In het punt $(x,y) = (0,0)$ geldt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Dit hoeft u niet te bewijzen. Bereikt f in $(0,0)$ een lokaal extremum? Leg uit.

(c) Bereken het maximum en minimum van $f(x,y)$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 8$.

Antwoord:

(a) De partiële afgeleiden van f zijn

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} - x\,(x - y + 1)\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\
&= (1 - x(x - y + 1))e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} - y\,(x - y + 1)\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\
&= (-1 - y(x - y + 1))e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.
\end{aligned}$$

We zoeken uit wanneer beide partiële afgeleiden nul zijn. Omdat de e-macht niet nul wordt, krijgen we een stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 1 - x(x - y + 1) = 0 \\ -1 - y(x - y + 1) = 0 \end{cases}$$

Hieruit halen we dat

$$x(x - y + 1) = 1 \qquad \text{en} - y(x - y + 1) = 1$$

en dus geldt

$$x\,(x - y + 1) = -y\,(x - y + 1)\,.$$

Er zijn nu twee mogelijkheden, namelijk $x - y + 1 = 0$ of $x = -y$. Uit het stelsel is eenvoudig in te zien dat $x - y + 1 = 0$ niet zal voldoen.

Dus geldt

$$x = -y.$$

We vullen dit in in de eerste vergelijking $1 - x(x - y + 1) = 0$ en we vinden

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

met als oplossingen

$$y = 1 \quad \text{en} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Omdat $x = -y$ zijn de bijbehorende x-waarden gelijk aan

$$x = -1 \quad \text{en} \quad x = \frac{1}{2}.$$

De twee stationaire punten zijn

$$(-1, 1) \text{ en } \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

(b) $(0, 0)$ is geen stationair punt en f kan bijgevolg in $(0, 0)$ geen lokaal extremum bereiken. De informatie over de tweede orde afgeleide doet niet ter zake.

(c) Op de cirkel $x^2 + y^2 = 8$ geldt

$$e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = e^{-4}$$

en dus

$$f(x, y) = (x - y + 1)e^{-4} \qquad \text{als } x^2 + y^2 = 8.$$

Het optimalisatieprobleem kan dus ook geformuleerd worden als: [De herformulering is niet essentieel om het probleem te kunnen oplossen, maar het vereenvoudigt de berekeningen aanzienlijk.]

- Vind het maximum en minimum van de functie $(x - y + 1)e^{-4}$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 8$.

We gebruiken de methode van Lagrange. We krijgen het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} e^{-4} &= 2\lambda x \\ -e^{-4} &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{cases}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen volgt (merk op dat $\lambda = 0$ niet kan)

$$x = \frac{e^{-4}}{2\lambda}, \qquad \text{en} \qquad y = -\frac{e^{-4}}{2\lambda}$$

en hieruit is het duidelijk dat

$$y = -x.$$

Dit vullen we in in de laatste vergelijking en we krijgen

$$2x^2 = 8$$

met als oplossingen $x = -2$ en $x = 2$.

De enige kandidaten voor extremen zijn bijgevolg $(-2, 2)$ en $(2, -2)$. De functiewaarden in deze punten zijn $-3e^{-4}$, resp. $5e^{-4}$.

Het minimum onder de nevenvoorwaarde is dus $-3e^{-4}$ en dit wordt bereikt in $(-2, 2)$.

Het maximum onder de nevenvoorwaarde is $5e^{-4}$ en dit wordt bereikt in $(2, -2)$.