Examen analyse
Tweede bachelor wiskunde
23 januari 2006

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Dit wil zeggen van **9 uur tot 13 uur**. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.
- Aarzel niet om me iets te vragen als er iets onduidelijk is.

Schrijf op elk blad je naam!

Hou je studentenkaart klaar!

Veel succes!

1. Op elk van de volgende vragen kan je in enkele lijntjes antwoorden.

   a) In het bewijs van Stelling 1.9 passen we tweemaal de middelwaardestelling toe. Op welke functies wordt de middelwaardestelling toegepast om de verschillende gelijkheden in de berekening onderaan pagina 9 en bovenaan pagina 10, te bekomen?

   b) De precieze interpretatie van de tweede versie van de stelling van Fubini is nogal omslachtig (zie de opmerking die volgt op de formulering van de stelling). Geef een voorbeeld van een integreerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zodanig dat de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x, 0)$ niet integreerbaar is.

   c) Bewijs dat de afbeelding $\omega \mapsto \|\omega\|$ in Definitie 3.8 voldoet aan de driehoeksongelijkheid.

   d) In het bewijs van Lemma 4.35 staat het mysterieuze zinnetje

      'Dankzij Lemma 4.18 is het dan voldoende het lemma te verifiëren wanneer $g = \chi_I$, voor een begrensd interval $I \subset \mathbb{R}$.'

      Waarom is dit zo?

2. Beschouw de functie $\mathrm{Bgtg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Voor welke waarden van $a \in \mathbb{R}$ is de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\mathrm{Bgtg}(x)}{|x|^a}$$

   integreerbaar. Bewijs je antwoord nauwkeurig.

3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodische functie die integreerbaar is op $[0, 2\pi]$. Veronderstel dat linker- en rechterlimiet van f bestaan in alle punten $x \in \mathbb{R}$. Noteer met t_n de Fejér-sommering van de Fourierreeks van f, zoals in Stelling 4.10. Toon aan dat

$$t_n(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

   Hint. Laat je inspireren door het bewijs van Stelling 4.10 op pagina 108 en door berekening (4.3) op pagina 105.

4. Bewijs dat voor alle $-\pi < x < \pi$ geldt dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{-x}{2}\,.$$

5. Neem een staaf met lengte 1 die als volgt is vastgemaakt: één uiteinde is bevestigd aan de z-as (maar kan op en neer bewegen) en de staaf is altijd evenwijdig met het xy-vlak. Laat de staaf bewegen van hoogte $z = 0$ tot hoogte $z = 1$ onder een hoek $\alpha(z)$ met de x-as. Noteer met $\mathcal{O}$ het oppervlak dat zo door de staaf beschreven wordt. Zij $\mathbf{V}$ het vectorveld gegeven door $\mathbf{V}(x, y, z) = (zx - y, zy + x, 0)$. Oriënteer $\mathcal{O}$ met de naar boven wijzende éénheidsnormaal en veronderstel dat α stijgend is.

   a) Geef een parametrisatie voor $\mathcal{O}$.

   b) Toon aan dat $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{O}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{r}\, dL = \alpha(1) - \alpha(0) - \frac{1}{2}$.

   c) Verifieer de stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ en het vectorveld $\mathbf{V}$.