Examen Klassieke Mechanica

Herbert De Gersem, Eef Temmerman

23 januari 2009, academiejaar 08-09
N2 en W2

NAAM:

RICHTING:

vraag 1 (/4)	vraag 2 (/4)	vraag 3 (/5)	vraag 4 (/3)	vraag 5 (/4)	TOTAAL (/20)

Verloop van het examen

- Het volledige examen duurt 3,5 uur of eventueel langer tot de laatste kandidaat klaar is met het mondelinge gedeelte. Uiteraard bestaat de mogelijkheid om vroeger in te dienen.
- Vraag 3 (eerste opgave van het deel oefeningen) is schriftelijk. Alle andere vragen zijn mondeling met schriftelijke voorbereiding.
- Het theoretische gedeelte zal eerst ondervraagd worden. Begin dus met de schriftelijke voorbereiding van vraag 1 en 2.

Opmerkingen bij het examen

- Zorg dat alle vragen op afzonderlijke bladen beantwoord worden. Nummer alle bladen en schrijf je naam of initialen op elk blad. Noteer ook je naam en richting bovenaan dit blad in de voorziene ruimte.
- Lees alle opgaven aandachtig en zorg dat je alle delen van de vraag beantwoordt.
- Schrijf groot en duidelijk. Maak grote en duidelijke figuren.

Veel succes!

Theorie

Vraag 1 (mondeling met schriftelijke voorbereiding, 4 punten)

Het principe van d'Alembert stelt dat

$$\sum_i \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i - \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{1}$$

waarbij $\vec{K}_i$ gegeven krachten, $\vec{p}_i$ impulsen en $\delta\vec{r}_i$ virtuele verplaatsingen zijn. Het verband tussen de cartesische coördinaten $\vec{r}_i$ en de veralgemeende coördinaten q_j is

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_{3n-k}) \tag{2}$$

met n het aantal massapunten en k het aantal holonome verbindingen. De termen van (1) kunnen herwerkt worden tot

$$\sum_i \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j \left(\sum_i \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \; ; \tag{3}$$

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j \left(\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \; . \tag{4}$$

Gevraagd:

(a) Wat is de fysische betekenis van de factor tussen de haakjes in (3)?

(b) Bewijs dat de uitdrukking tussen haakjes in (4) gelijk is aan

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \tag{5}$$

waarbij T de totale kinetische energie is. Maak eventueel gebruik van de volgende eigenschappen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \; ; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \; . \tag{7}$$

Vraag 2 **(mondeling met schriftelijke voorbereiding, 4 punten)**

Een cilindersymmetrisch lichaam ondergaat een vrije precessiebeweging, beschreven door de Lagrangiaan

$$L = \frac{I}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_\mathrm{s}}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 \tag{8}$$

in functie van de hoeken van Euler (φ, θ, ψ). Het lichaam is symmetrisch volgens de z-as. Zijn traagheidstensor is

$$\overline{\overline{I}} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_\mathrm{s} \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Gevraagd:

(a) Wanneer treedt een dergelijke beweging op?

(b) Welke grootheden blijven behouden?

(c) Bepaal de hoeksnelheid van de precessie als functie van de grootte van het impulsmoment $\vec{L}'$.

(d) Bepaal de hoek tussen de symmetrie-as en de rotatie-as van de precessiebeweging.

Oefeningen

Vraag 3 (schriftelijk, 5 punten)

Een ruit bestaat uit vier homogene staven met massa M en lengte b, onderling verbonden door gladde scharnieren. De ruit beweegt in een verticaal vlak onder invloed van de zwaartekracht en wel zó dat één diagonaal steeds verticaal blijft. Op $t = 0$ bevindt het massamiddelpunt C zich op hoogte h met snelheid nul en heeft de ruit de vorm van een vierkant.

(a) Stel de Lagrangevergelijkingen op in geschikte veralgemeende coördinaten.

(b) Bepaal twee behoudswetten.

(c) Integreer de differentiaalvergelijkingen voor het geval dat de totale energie gelijk is aan $8Mgh$.

Vraag 4 (mondeling met schriftelijke voorbereiding, 3 punten)

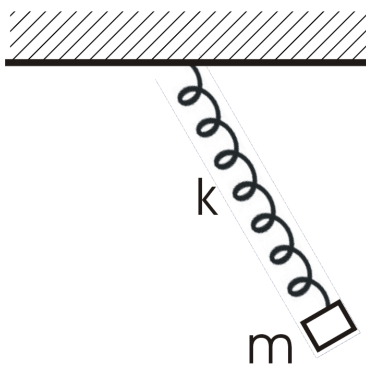
Een satelliet met een massa van 2500 kg draait in een elliptische baan rond de aarde. In het apogeum (verste punt van de aarde) bedraagt de hoogte vanop de aarde 3600 km en in het perigeum (dichtste punt tot de aarde) bedraagt de hoogte 1100 km. De straal van de aarde bedraagt 6400 km. De totale energie van de satelliet op zijn baan rond de aarde bedraagt $-5,73 \cdot 10^{10}$ J. Verder is gegeven dat $k = 10,04 \cdot 10^{17}$ J·m.

(a) Bereken het impulsmoment van de satelliet.

(b) Bereken de snelheid van de satelliet in het apogeum en het perigeum.

Vraag 5 (mondeling met schriftelijke voorbereiding, 4 punten)

Een massa m wordt opgehangen door middel van een veer met veerconstante k en natuurlijke lengte l_0. Dit oscillerend systeem kan tegelijkertijd ook slingeren in een verticaal vlak (Figuur 1). Bepaal de normale trillingsfrequenties van dit systeem voor kleine trillingen rond de evenwichtsconfiguratie. Leid hieruit de algemene bewegingsvergelijkingen af voor kleine trillingen rond het evenwicht. Verwaarloos termen die hoger zijn dan 2de orde in de veralgemeende coördinaten.



Figuur 1: De oscillerende slinger beweegt in een verticaal vlak.