# Examen Klassieke Mechanica

Herbert De Gersem, Eef Temmerman

23 januari 2009, academiejaar 08-09
IW2 en BIW2

NAAM:

RICHTING:

| vraag 1 (/4) | vraag 2 (/4) | vraag 3 (/5) | vraag 4 (/4) | vraag 5 (/3) | TOTAAL (/20) |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Verloop van het examen**

- Het volledige examen duurt 3,5 uur of eventueel langer tot de laatste kandidaat klaar is met het mondelinge gedeelte. Uiteraard bestaat de mogelijkheid om vroeger in te dienen.
- Vraag 3 (eerste opgave van het deel oefeningen) is schriftelijk. Alle andere vragen zijn mondeling met schriftelijke voorbereiding.
- Het theoretische gedeelte zal eerst ondervraagd worden. Begin dus met de schriftelijke voorbereiding van vraag 1 en 2.

**Opmerkingen bij het examen**

- Zorg dat alle vragen op afzonderlijke bladen beantwoord worden. Nummer alle bladen en schrijf je naam of initialen op elk blad. Noteer ook je naam en richting bovenaan dit blad in de voorziene ruimte.
- Lees alle opgaven aandachtig en zorg dat je alle delen van de vraag beantwoordt.
- Schrijf groot en duidelijk. Maak grote en duidelijke figuren.

**Veel succes!**

## Theorie

### Vraag 1 (mondeling met schriftelijke voorbereiding, 4 punten)

Het principe van d'Alembert stelt dat indien alle verbindingskrachten ideaal zijn,

$$\sum_i \left(\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{1}$$

waarbij $\delta\vec{r}_i$ virtuele verplaatsingen, $\vec{K}_i$ gegeven krachten en $\vec{p}_i$ impulsen zijn.

Gevraagd:

(a) Wanneer is een verbindingskracht ideaal? Geef een voorbeeld.

(b) Leid het principe van d'Alembert af uit de tweede wet van Newton.

(c) Wat zijn de gelijkenissen en verschillen tussen het principe van d'Alembert en de vergelijkingen van Lagrange?

### Vraag 2 (mondeling met schriftelijke voorbereiding, 4 punten)

Gevraagd:

(a) Beschrijf de beweging van een tol in woorden.

(b) Stel de Lagrangiaan op in functie van de hoeken van Euler.

(c) Welke grootheden blijven behouden?

Na uitmiddelen van de beweging van de symmetrie-as $z$ van de tol rond het impulsmoment $\vec{L}'$, blijkt de verandering van het impulsmoment gelijk te zijn aan

$$\left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{\text{gem}} = \frac{mg\ell\cos\alpha}{L'}\vec{u}_{z'} \times \vec{L}' \tag{2}$$

waarbij $\ell$ de afstand tussen het vaste punt en het massacentrum van de tol, $\vec{u}_{z'}$ de eenheidsvector langs de verticale as van het absolute assenstelsel en $\alpha$ de hoek tussen de $z$-as en $\vec{L}'$ is.
Gevraagd:

(d) Bereken de hoeksnelheid van de precessiebeweging.

(e) Hoe kan men de hoeksnelheid van de precessiebeweging vergroten?

## Oefeningen

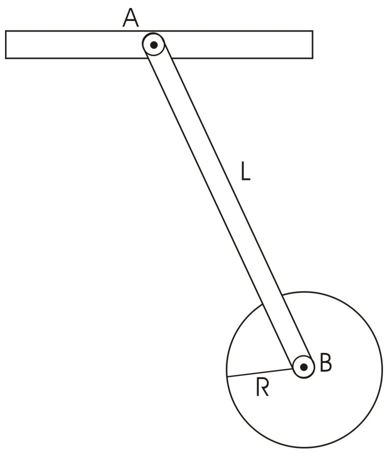
### Vraag 3 (schriftelijk, 5 punten)

Een uniforme staaf met lengte $L$ en massa $M$ kan draaien rond een horizontale as door zijn uiteinde A (zie Figuur 1). Het andere uiteinde van de staaf is verbonden met het middelpunt van een dunne schijf met massa $M$ en straal $R$. De schijf kan zonder wrijving roteren rond B. De schijf slingert dus mee met de staaf en kan ondertussen roteren rond zijn middelpunt.

(a) Kies geschikte veralgemeende coördinaten en stel de Lagrangevergelijkingen van de beweging op.

(b) Bepaal de Hamiltoniaan en de bijhorende bewegingsvergelijkingen van Hamilton.

(c) Welke twee behoudswetten kan je vinden voor deze beweging?



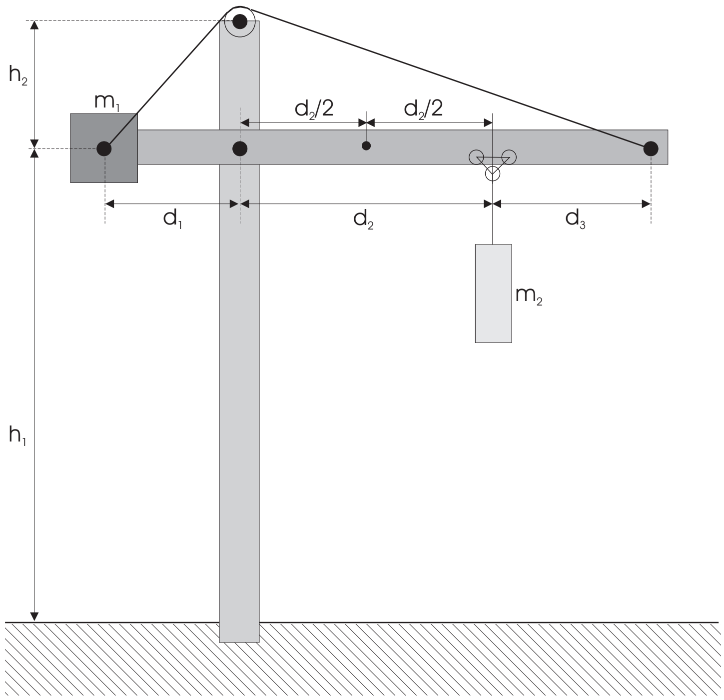

Figuur 1: De staaf roteert rond A, terwijl de schijf roteert rond B.

### Vraag 4 (mondeling met schriftelijke voorbereiding, 4 punten)

Een kraan bestaat uit (zie Fig. 2)

- een verticale en een horizontale balk die scharnierend aan elkaar verbonden zijn,
- een kabelverbinding tussen achter- en voorzijde van de horizontale balk over een wrijvingsloze katrol,
- een tegengewicht $m_1$.

De afmetingen zijn aangeduid in Fig. 2 en opgesomd in Tabel 1. De verticale balk is in de grond ingeklemd. De balken kunnen als massaloos aanzien worden. De kraan takelt een massa $m_2$ op een afstand $d_2$ van de verticale balk. Beide balken hebben een volle, vierkante doorsnede met zijde $a$.




Figuur 2: Kraan.

Tabel 1: Afmetingen en massa's van de kraan.

| symbool | waarde | |
|---|---|---|
| $d_1$ | 2 | m |
| $d_2$ | 6 | m |
| $d_3$ | 2 | m |
| $h_1$ | 12 | m |
| $h_2$ | 2 | m |
| $m_1$ | 500 | kg |
| $m_2$ | 200 | kg |
| $a$ | 8 | cm |

(a) Teken krachtendiagramma's voor beide balken. Geef duidelijke en eenduidige namen aan de verschillende krachten.

(b) Schrijf de vergelijkingen voor statisch evenwicht voor beide balken uit.

(c) Bereken de spankracht in de kabel en de verbindingskrachten in het scharnier tussen beide balken.

(d) Teken een belastingsdiagramma voor de verticale balk.

(e) Bereken de spanningstoestand in de horizontale balk in een punt op afstand $d_2/2$ van zowel de verticale balk als de lier.

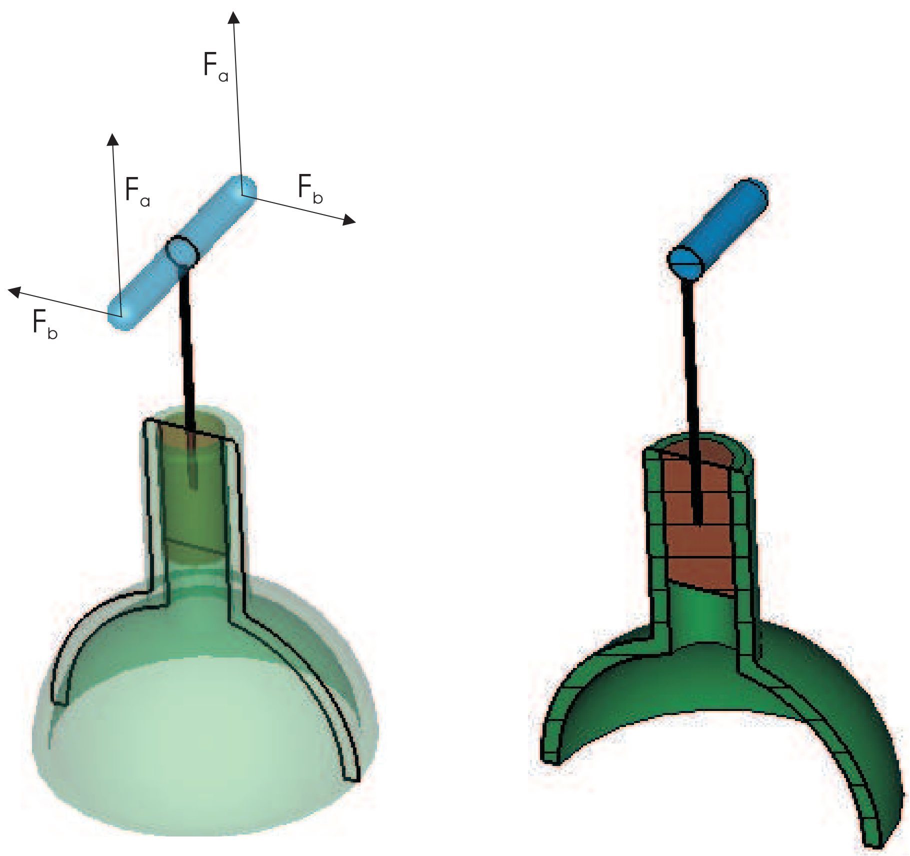
Werk deze oefening zowel op een symbolische als op een numerieke manier uit. Indien een onderdeel van de oefening niet opgelost wordt, werk symbolisch verder en gebruik duidelijk gedefinieerde symbolen voor onbekende tussentijdse oplossingen.

### Vraag 5 (mondeling met schriftelijke voorbereiding, 3 punten)

Een kurkentrekker bestaat uit (zie Fig. 3)

- een ronde ijzeren staaf met een lengte van $\ell = 10$ cm en een diameter van $d = 3$ mm,
- een hendel met twee armen die elk een lengte van $a = 4$ cm hebben.

De kurkentrekker is over een lengte $\delta = 2$ cm ingeschroefd in een kurk met lengte $b = 4$ cm en straal $R = 1$ cm. De hals van de fles heeft een dikte van $\eta = 3$ mm. De kurk en de binnenkant van de hals van de glazen fles wisselen normaal- en schuifspanningen uit. De normaalspanning (het feit dat de kurk radiaal tegen de hals duwt en vice versa) zorgt ervoor dat er een axiale en azimutale schuifspanning optreedt die verhindert dat de kurk respectievelijk uit de fles getrokken wordt of in de hals rondgedraaid wordt. In analogie met de mechanica voor starre voorwerpen bestaat in het geval van statische wrijving een maximale schuifspanning $\tau_{\text{max}} = \mu_{\text{s}}\sigma$ in functie van de uitgeoefende normaalspanning $\sigma$ en de statische wrijvingscoëfficiënt $\mu_{\text{s}}$. Tussen kurk en glas bedraagt de statische wrijvingscoëfficiënt $\mu_{\text{s}} = 0.2$. Het blijkt dat door aanleggen van twee trekkrachten $F_{\text{a}} = 60$ N de kurk niet in beweging komt. Voegt men daarentegen twee extra krachten $F_{\text{b}} = 40$ N toe, dan wordt de statische wrijving net niet (of net wel) overwonnen.




Figuur 3: Glazen fles met kurk en kurkentrekker.

(a) Bereken de normaalspanning uitgeoefend tussen de kurk en de glazen hals van de fles. Ga ervan uit dat de normaalspanning homogeen over het beschikbare oppervlak verdeeld is.

(b) Bereken voor de belasting met zowel de krachten $F_a$ als de krachten $F_b$, de spanningstoestand in het punt halfweg tussen de hendel en de bovenkant van de kurk. Teken de spanningstoestand.

(c) Bereken de tangentiële spanning (*hoop stress*) en de axiale spanning (*axial stress*) in de glazen flessenhals.

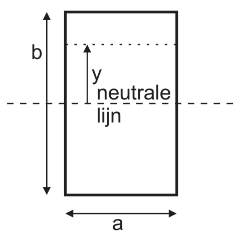
(d) Hoe ver moet de kurk al uit de fles getrokken zijn voordat de krachten $F_a$ volstaan om de kurk in beweging te houden?

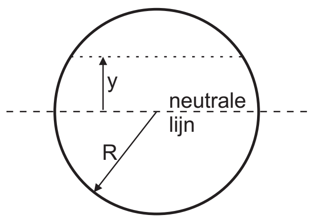
# Bijkomende informatie

Tabel 2: Materiaaleigenschappen.

| | soortelijk gewicht | elasticiteitsmodulus | glijdingsmodulus | Poisson ratio | maximale spanning | maximale schuifspanning |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\rho$ (ton/m$^3$) | $E$ (GPa) | $G$ (GPa) | $\nu$ () | $\sigma_{\text{max}}$ (MPa) | $\tau_{\text{max}}$ (MPa) |
| constructiestaal A-36 | 7.85 | 200 | 75 | 0.32 | 250 | 250 |

Tabel 3: Traagheidsmomenten van veelgebruikte doorsnedes.




| | | | |
|---|---|---|---|
| oppervlakte | $A$ | $ab$ | $\pi R^2$ |
| polair traagheidsmoment | $I_p = \int_A r^2 \mathrm{d}A$ | $\frac{1}{6}ab\left(a^2+b^2\right)$ | $\frac{1}{2}\pi R^4$ |
| linear traagheidsmoment | $I = \int_A y^2 \mathrm{d}A$ | $\frac{1}{12}ab^3$ | $\frac{1}{4}R^4$ |
| statisch moment | $Q(y) = \int_{A'} y \mathrm{d}A'$ | $\frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)$ | $\frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{3/2}$ |