Examen *G0U13 - Bewijzen en Redeneren*, 2010-2011

bachelor in de Wiskunde, bachelor in de Fysica,
bachelor in de Economische Wetenschappen en
bachelor in de Wijsbegeerte

Vrijdag 4 februari 2011, 8u30

Naam:
Jaar en richting:

Vraag 1. (Theorievraag)

(a) Geef de definitie van ‘equivalentierelatie’, dus inclusief de definities van de begrippen die je daarbij gebruikt (‘relatie’ hoef je niet te definiëren).

(b) Geef de definitie van een partitie van een verzameling.

(c) Leg uit hoe je aan een equivalentierelatie op een natuurlijke manier een partitie kan associëren, en ook omgekeerd, hoe je met een partitie de bijhorende equivalentierelatie kan construeren. Je hoeft niet te bewijzen dat je ook effectief een partitie/equivalentierelatie bekomt.

Antwoord. Voor (a) moet je de Definities 3.2.3 en 3.2.1 uit de cursus geven. Een partitie (b) is gedefinieerd in Definitie 3.2.5. (c) Om van een equivalentierelatie naar een partitie te gaan gebruik je de constructie in en na Definitie 3.2.6 (over equivalentieklassen). Voor de omgekeerde richting moet je het principe uit Stelling 3.2.9 geven.

Vraag 2.

Zij X, Y en Z verzamelingen en $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ functies.

(a) Geef de definitie van $g^{-1}(z)$ voor een $z \in Z$.

(b) Bewijs dat

$$\forall z \in Z : \; f^{-1}(g^{-1}(z)) = (g \circ f)^{-1}(z).$$

Antwoord.

(a) Per definitie is $g^{-1}(z)$ de verzameling van alle elementen y van Y die voldoen aan $g(y) = z$. Dus

$$g^{-1}(z) = \{y \in Y \mid g(y) = z\}.$$

(b) Kies $z \in Z$ willekeurig. We tonen twee inclusies aan.

Neem $x \in f^{-1}(g^{-1}(z))$ willekeurig. Dan geldt dat $f(x) \in g^{-1}(z)$ en dus ook $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Dit betekent dat $x \in (g \circ f)^{-1}(z)$. Hiermee is $f^{-1}(g^{-1}(z)) \subset (g \circ f)^{-1}(z)$ bewezen.

Voor de omgekeerde inclusie beginnen we met een willekeurige $x \in (g \circ f)^{-1}(z)$. Dan is $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, zodat $f(x) \in g^{-1}(z)$. Dit impliceert dat $x \in f^{-1}(g^{-1}(z))$. De inclusie $(g \circ f)^{-1}(z) \subset f^{-1}(g^{-1}(z))$ is nu ook bewezen.

Omdat de twee inclusies gelden zijn de verzamelingen $f^{-1}(g^{-1}(z))$ en $(g \circ f)^{-1}(z)$ aan elkaar gelijk.

Opmerking: Als je denkt dat het gebruik van de notaties f^{-1} en g^{-1} betekent dat f en g inverteerbare functies zijn, dan is dat een grote fout en krijg je 0 punten voor deze vraag.

Vraag 3.

Zij I, X en Y willekeurige verzamelingen en stel dat we voor elke $i \in I$ een deelverzameling $A_i \subset X$ gegeven hebben. Zij $f : X \to Y$ een functie van X naar Y waarvoor geldt dat

$$\bigcup_{i \in I} f(A_i) = Y. \tag{1}$$

(a) Toon aan dat hieruit volgt dat f surjectief is.

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ niet hoeft te gelden.

(c) Bewijs de implicatie

$$f \text{ is injectief } \Rightarrow \left[\bigcup_{i \in I} A_i = X\right].$$

Antwoord.

(a) Kies $y \in Y$ willekeurig. Dan volgt uit (1) dat er een $i \in I$ bestaat met $y \in f(A_i)$. Er is dan een element $x \in A_i$ met $f(x) = y$. Omdat $A_i \subset X$ is ook $x \in X$. Dus $y = f(x)$ voor zekere $x \in X$. Omdat y willekeurig in Y gekozen was, besluiten we dat f surjectief is.

(b) Er zijn veel voorbeelden mogelijk. Hier volgen er twee.

Neem $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{N}$ en $A_i = \{i, -i\}$ voor elke $i \in I$. De functie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$ voldoet aan (1), en ook $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ is waar, maar f is duidelijk niet injectief.

Een ander voorbeeld is $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1\}$, $I = \{1\}$ en $A_1 := X$. De enige functie $f : X \to Y$ beeldt alles op 1 af. Dan zijn (1) en $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ waar, maar de functie is niet injectief.

(c) Veronderstel dat f injectief is. Omdat $A_i \subset X$ voor elke $i \in I$ geldt zeker $\bigcup_{i \in I} A_i \subset X$. We moeten nog de andere inclusie $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ bewijzen.

Kies $x \in X$ willekeurig. Dan is $y = f(x) \in Y$. Vanwege (1) geldt dan ook $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ hetgeen betekent dat er een $i \in I$ bestaat met $y \in f(A_i)$. Bijgevolg is er dan een $a \in A_i$ met $y = f(a)$. Dan geldt $f(x) = f(a)$ en uit de injectiviteit van f volgt dat $x = a$, zodat $x \in A_i$ en bijgevolg $x \in\subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Dit toont aan dat $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Vraag 4.

Herinner je dat de Fibonaccigetallen gedefinieerd worden door $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ en voor $n \geq 1$: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Voor een reëel getal α is $\lfloor \alpha \rfloor$ het grootste geheel getal dat kleiner dan of gelijk is aan α. Bewijs dat het volgende geldt voor elk natuurlijk getal n:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

Antwoord. We gaan dit uiteraard bewijzen door middel van (veralgemeende) volledige inductie op n.

Basisstap In de basisstap verifiëren we de uitspraak voor $n = 0$ en $n = 1$.

Voor $n = 0$ is de som gelijk aan

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0-k}{k} = \binom{0}{0} = 1$$

en dit is inderdaad gelijk aan F_1.

Voor $n = 1$ is de som gelijk aan

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} = 1$$

en dit is gelijk aan F_2 want $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$.

Inductiestap Kies $n \geq 1$ willekeurig. We nemen aan dat de bewering klopt voor n en $n - 1$. We nemen dus aan dat

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1} \quad \text{en} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} = F_n$$

waar zijn.

Vanwege de recursie voor Fibonacci getallen is dan

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k}. \tag{2}$$

Het doel is dit te herschrijven tot

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n+1-k}{k} \tag{3}$$

en we gebruiken hierbij de volgende identiteit voor binomiaalcoëfficiënten

$$\binom{n+1-k}{k}=\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k-1}. \tag{4}$$

We veranderen de sommatieindex in de tweede som in (2) van k naar $k-1$. Er volgt dan

$$F_{n+2}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}\binom{n-k}{k-1}. \tag{5}$$

Als n even is dan zijn de bovengrenzen in de twee sommaties in (5) aan elkaar gelijk en dan volgt

$$\begin{aligned}F_{n+2}&=\binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\binom{n-k}{k-1}\\&=1+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k-1}\right)\end{aligned}$$

want $\binom{n}{0}=1$. Pas hierop (4) toe en er volgt

$$F_{n+2}=1+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\binom{n+1-k}{k}$$

en dit is gelijk aan (3) omdat $\binom{n+1}{0}=1$ en $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor=\frac{n}{2}$ want n is even.

Als n oneven is, zeg $n=2l+1$, dan geldt $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=l$ en $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1=l+1$. Dan volgt uit (5) dat

$$\begin{aligned}F_{n+2}&=\binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{l}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=1}^{l}\binom{n-k}{k-1}+\binom{n-(l+1)}{l}\\&=1+\sum_{k=1}^{l}\left(\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k-1}\right)+1\end{aligned}$$

want $\binom{n}{0} = 1$ en $\binom{n-(l+1)}{l} = \binom{2l+1-(l+1)}{l} = \binom{l}{l} = 1$. We passen (4) weer toe en er volgt

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= 1 + \sum_{k=1}^{l} \binom{n+1-k}{k} + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{l+1} \binom{n+1-k}{k} \end{aligned}$$

want $\binom{n+1}{0} = 1$ en $\binom{n+1-(l+1)}{l+1} = \binom{l+1}{l+1} = 1$. Dit is gelijk aan (3) omdat $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} = l+1$ want $n = 2l+1$ is oneven.

Hiermee is de inductiestap bewezen.

Conclusie De basisstap en de inductiestap zijn bewezen. Het gevraagde is nu bewezen vanwege het principe van volledige inductie.

Vraag 5.

Definieer de reële rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door $a_0 = 1$ en de recursierelatie

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

Toon aan dat deze rij convergeert en bepaal de limiet.
Antwoord. Deze vraag is op meerdere wijzen aan te pakken. We geven één volledige oplossing, en een schets van een tweede manier.

Eerste manier Een eerste oplossing bestaat uit volgende stappen. Eerst merken we op $a_1 = 2$, en dat we even goed de convergentie van de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ mogen beschouwen. Dan bewijzen we dat

$$F : [2, 3] \longrightarrow [2, 3] : x \mapsto 3 - 1/x$$

goed gedefinieerd is en een contractie op $[2, 3]$ is. De contractiestelling zegt dan dat F een uniek vast punt heeft, waarnaar de rij (a_n) moet convergeren. Het vaste punt is eenvoudig te berekenen als oplossing van de vergelijking $x = F(x)$.

(a) We bewijzen eerst dat F goed gedefinieerd is. Dat wil zeggen dat we moeten bewijzen dat $F(x) \in [2, 3]$ als $x \in [2, 3]$. Neem dus $x \in [2, 3]$ willekeurig. Dan is $x \geq 1$ en dus $-1/x > -1/2$, zodat $F(x) = 3-1/x > 3 - 1/2 > 2$. Anderzijds is ook $-1/x < 0$, zodat $F(x) = 3 - 1/x < 3$. Bijgevolg is $2 < F(x) < 3$ en dus zeker $F(x) \in [2, 3]$.

(b) Vervolgens laten we zien dat F een contractie is. We moeten dus een $c \in [0, 1[$ vinden zodat voor elke $x, y \in [2, 3]$ geldt dat $|F(x) - F(y)| \leq c|x - y|$. Voor $x, y \in [2, 3]$ geldt

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \left(3 - \frac{1}{x}\right) - \left(3 - \frac{1}{y}\right) \right| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| \\ &= \left| \frac{x - y}{xy} \right| = \frac{1}{|xy|}\, |x - y|. \end{aligned}$$

Omdat $x, y \in [2, 3]$ is $|xy| \geq 4$ en dus $\frac{1}{|xy|} \leq \frac{1}{4}$. Er volgt dus dat

$$|F(x) - F(y)| \leq c|x - y| \qquad \text{met } c = \frac{1}{4}.$$

Dit bewijst dat F een contractie is.

(c) Het vaste punt van F is de unieke oplossing α van $x = F(x)$ in het interval $[2, 3]$. Merk op dat deze oplossing bestaat en uniek is door de contractiestelling! Een kleine berekening levert dat $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Dit vast punt is dan ook de limiet van de rij (a_n).

Tweede manier Een tweede aanpak is gebaseerd op de eigenschap dat een stijgende rij die naar boven begrensd is, convergeert. Eenvoudige berekening levert dat $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2,5$, $a_3 = 2,6$, $\ldots$, zodat het er op lijkt dat onze rij inderdaad stijgend is en naar boven begrensd.

(a) Bewijs eerst dat $1 \leq a_n \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ voor alle $n \geq 0$. Dit is een eenvoudig bewijs met volledige inductie. Definieer voor het vervolg $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Bewijs nu dat de rij stijgend is. Dit gaat als volgt. Er geldt

$$a_{n+1} - a_n = 3 - \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{3a_n - 1 - a_n^2}{a_n}.$$

Merk op dat α voldoet aan $3\alpha - 1 - \alpha^2 = 0$. Uit $1 \leq a_n \leq \alpha$ kun je nu halen dat $3a_n - 1 - a_n^2 \geq 0$ zodat $a_{n+1} - a_n \geq 0$. De rij (a_n) is bijgevolg stijgend.

(c) Omdat de rij stijgend is en naar boven begrensd, is ze convergent, zeg naar limiet L. Dan volgt uit de rekenregels voor limieten dat $L = 3 - \frac{1}{L}$. Dit leidt tot de vierkantsvergelijking $L^2 - 3L + 1 = 0$ met als twee oplossingen α en $\frac{1}{\alpha}$. De mogelijkheid $L = \frac{1}{\alpha}$ moeten we verwerpen want $\frac{1}{\alpha} < 1$. Dus $L = \alpha$.