Examen Complexe Analyse
vrijdag 22 juni 2012, 14:00–18:00 uur

Uitwerking van het examen

Vraag 1 Zij $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bereken de polen en residuen van de functie

$$z \mapsto \frac{e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2}.$$

(b) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Leg alle stappen duidelijk uit.

Antwoord: (a) Noem de functie f. De noemer $(1+z^2)^2$ heeft nulpunten in $z = i$ en $z = -i$ met multipliciteit 2. De teller is er niet nul en bijgevolg heeft f dubbele polen in $z = i$ en $z = -i$. Verder zijn er geen polen.

Het residu in $z = i$ is de coëfficiënt c_{-1} in de Laurentontwikkeling

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-i)^2} + \frac{c_{-1}}{z-i} + c_0 + O(z-i).$$

Omdat het een pool is van orde 2 kunnen we het residu berekenen door (zie Proposition 4.5.6 uit het boek)

$$\operatorname{Res}\,(f; z = i) = \lim_{z \to i} \frac{\partial}{\partial z}\left[(z-i)^2 f(z)\right].$$

Nu is

$$(z-i)^2 f(z) = (z-i)^2 \frac{e^{i\alpha z}}{((z-i)(z+i))^2} = \frac{e^{i\alpha z}}{(z+i)^2}$$

waarvan de afgeleide gelijk is aan

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(z-i)^2 f(z)\right] = \frac{(z+i)^2(i\alpha)e^{i\alpha z} - 2(z+i)e^{i\alpha z}}{(z+i)^4}.$$

Voor $z = i$ krijgen we het residu

$$\begin{aligned}\text{Res }(f; z = -i) &= \frac{(2i)^2(i\alpha)e^{-\alpha} - 2(2i)e^{-\alpha z}}{(2i)^4} = \frac{-4i\alpha - 4i}{16}e^{-\alpha}\\ &= \frac{\alpha + 1}{4i}e^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Een soortgelijke berekening levert

$$\text{Res }(f; z = -i) = \frac{\alpha - 1}{4i}e^{\alpha}.$$

(b) Noteer de gevraagde integraal met $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Het is belangrijk om de gevallen $\alpha \geq 0$ en $\alpha \leq 0$ te onderscheiden. Omdat de cosinus een even functie is geldt ook

$$I(-\alpha) = I(\alpha).$$

We kunnen ons daarom bij de berekening beperken tot $\alpha \geq 0$. We nemen verder dus $\alpha \geq 0$.

We nemen $R > 1$ en een contour γ_R bestaande uit het interval $[-R, R]$ en de halve cirkel $C(0, R)^+$ in het bovenhalfvlak met parametrisatie

$$C(0, R)^+ : \quad z = Re^{it}, \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Vanwege de residustelling en onderdeel (a) geldt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f(z)dz &= 2\pi i \text{Res }(f, z = i) = 2\pi i\,\frac{\alpha + 1}{4i}e^{-\alpha}\\ &= \frac{(\alpha + 1)}{2\pi}e^{-\alpha}.\end{aligned} \tag{1}$$

De integraal splitst in twee stukken

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C(0,R)^+} f(z)dz = \frac{(\alpha + 1)\pi}{2}e^{-\alpha}. \tag{2}$$

We gaan nu laten zien dat de tweede integraal aan de linkerkant van (2) naar nul gaat als $R \to +\infty$. Hiervoor is het belangrijk dat $\alpha \geq 0$. Omdat $\alpha \geq 0$ geldt voor Im $z \geq 0$ dat $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \text{Im } z} \leq 1$ en bijgevolg is

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{i\alpha z}}{(1 + z^2)^2}\right| \leq \frac{1}{|1 + z^2|^2} \qquad \text{als Im } z \geq 0.$$

Voor $z \in C(0,R)^+$ geldt dan (vanwege $R > 1$),

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|1+z^2|^2} \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

en bijgevolg is vanwege de ML afschatting

$$\left| \int_{C(0,R)^+} f(z)dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

waaruit duidelijk blijkt dat

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C(0,R)^+} f(z)dz = 0.$$

Als we dit gebruiken in (2) dan zien we dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{(\alpha+1)\pi}{2} e^{-\alpha}. \tag{3}$$

Door het reële deel te nemen in (3) volgt uiteindelijk dat

$$I(\alpha) = \frac{(\alpha+1)\pi}{2} e^{-\alpha}, \qquad \alpha \geq 0.$$

Dit is het antwoord voor $\alpha \geq 0$.

Voor $\alpha < 0$ geldt dan

$$I(\alpha) = I(-\alpha) = \frac{(-\alpha+1)\pi}{2} e^{\alpha}, \qquad \alpha < 0.$$

Vraag 2 (a) Neem aan dat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een gehele functie is die voor zekere $M > 0$ en $n \in \mathbb{N}$ voldoet aan

$$0 < |f(z)| \leq M|z|^n \qquad \text{voor alle } z \in \mathbb{C} \text{ met } |z| > 3.$$

Laat zien dat f een veelterm is.

(b) Bereken f als tevens gegeven is dat

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,4)} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,4)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,4)} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1.$$

Antwoord: (a) Je kunt hier Theorem 3.4.4 uit het boek gebruiken. Volgens deze stelling is een gehele functie f met de eigenschap dat

$$|f(z)| \leq C|z|^k, \qquad \text{voor alle } |z| > 1 \tag{4}$$

voor zekere C en k, noodzakelijkerwijs een veelterm van graad $\leq k$.

Er is nu gegeven dat $|f(z)| \leq M|z|^n$ geldt voor $|z| > 3$. Om (4) te kunnen gebruiken kunnen we op twee manieren redeneren.

Eerste manier: Voer in

$$g(z) = f(3z).$$

Als $|z| > 1$ dan is $|3z| > 3$ en bijgevolg geldt vanwege de gegeven ongelijkheid voor f dat

$$|g(z)| = |f(3z)| \leq M|3z|^n = 3^n M|z|^n, \qquad \text{voor alle } |z| > 1.$$

Dan voldoet g aan de voorwaarden van Theorem 3.4.4 met $C = 3^n M$ en $k = n$. Volgens Theorem 3.4.4 is g een veelterm van graad $\leq n$ en dan is f ook een veelterm van graad $\leq n$ want $f(z) = g(z/3)$.

Tweede manier: Omdat het een gehele functie is is f zeker continu op $\mathbb{C}$ en bijgevolg is f begrensd op de compacte verzameling $\overline{D(0,3)}$, zeg

$$|f(z)| \leq C, \qquad |z| \leq 3$$

voor zekere $C > 0$ waarvan we zeker mogen aannemen dat $C \geq M$. Dan geldt zeker

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \qquad \text{voor } 1 < |z| \leq 3.$$

Voor $|z| > 3$ weten we ook, omdat $C \geq M$,

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \qquad \text{voor } |z| > 3.$$

Dus

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \qquad \text{voor } |z| > 1.$$

We kunnen nu Theorem 3.4.4 toepassen op f zelf, en er volgt dat f een veelterm is van graad $\leq n$.

(b) Vanwege

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,4)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1$$

en het argumentprincipe (Proposition 5.1.2 in het boek) heeft f precies één enkelvoudig nulpunt in $D(0,4)$. Er is gegeven dat $|f(z)| > 0$ voor $|z| > 3$ en bijgevolg heeft f geen nulpunten met $|z| > 3$. We zien dat f precies één enkelvoudig nulpunt heeft in $\mathbb{C}$ en dit nulpunt ligt in de gesloten schijf $\overline{D(0,3)}$.

Omdat f een veelterm is (zie onderdeel (a)) met precies één nulpunt, is f van de vorm

$$f(z) = az + b$$

met $a \neq 0$. Het nulpunt van f is $z_0 = -\frac{b}{a}$.

Dan heeft $1/f(z)$ een enkelvoudige pool in $z = z_0$. Vanwege

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,4)} \frac{1}{f(z)} dz = 1$$

en de residustelling volgt dan

$$1 = \text{Res}\left(\frac{1}{f(z)}; z = z_0\right) = \text{Res}\left(\frac{1}{az+b}; z = -\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

zodat $a = 1$ en $f(z) = z + b$. Het nulpunt is $z_0 = -b$.

Net zo volgt uit

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,4)} z\frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1$$

dat

$$1 = \text{Res}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}; z = z_0\right) = \text{Res}\left(z\frac{1}{z+b}; z = -b\right) = -b.$$

Dus $b = -1$ en de gevraagde functie is

$$f(z) = z - 1.$$

Vraag 3 Zij U het gebied

$$U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 < 4,\ (x+1)^2 + y^2 > 1\}$$

(a) Schets U en vind een conforme afbeelding van U naar de eenheidsschijf $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

[Hint: zoek eerst een Möbiustransformatie die U afbeeldt op een verticale strip $a < \operatorname{Re} z < b$.]

(b) Bepaal een begrensde continue functie $u : \overline{U} \setminus \{(-2, 0)\} \to \mathbb{R}$ die harmonisch is op U en die voldoet aan

$$u(x, y) = 10 \qquad \text{als } x^2 + y^2 = 4$$

en

$$u(x, y) = -10 \qquad \text{als } (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Geef een zo eenvoudig mogelijke uitdrukking voor u.

Antwoord (a) U is het gebied dat begrensd wordt door de twee cirkels $C(0, 2)$ en $C(-1, 1)$. De twee cirkels raken elkaar in het punt $z = -2$.

Om U af te beelden naar D beginnen we met een Möbiustransformatie die -2 afbeeldt naar ∞. Omdat een Möbiustransformatie cirkels en rechten afbeeldt op cirkels en rechten zullen de twee cirkels $C(0, 2)$ en $C(-1, 1)$ (die allebei -2 bevatten) afgebeeld worden op twee rechten (want het beeld van -2 is ∞).

We nemen concreet (dit is niet de enige mogelijke keuze)

$$f_1(z) = \frac{2z}{z+2}. \tag{5}$$

met inderdaad $f_1(-2) = \infty$. Dan wordt $C(0, 1)$ afgebeeld op een rechte door $f_1(0) = 0$ en door $f_1(-1+i) = 2i$. Dit is bijgevolg de imaginaire as. De cirkel $C(0, 2)$ wordt afgebeeld op de rechte door $f_1(2) = 1$ en $f_1(2i) = 1 + i$. Dit is de verticale rechte met reëel deel 1. Dus f_1 beeldt U conform af op de verticale strip

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

We gaan nu verder met

$$f_2(z) = e^{\pi z} \tag{6}$$

die U_1 conform afbeeldt op het bovenhalfvlak

$$U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}.$$

Vervolgens beeldt de Cayleytransformatie (zie ook Theorem 6.3.6 in het boek)

$$f_3(z) = \frac{z-i}{z+i} \tag{7}$$

het bovenhalfvlak conform af op de eenheidscirkel D.

De samenstelling $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ van de conforme afbeeldingen (5), (6), (7) is een conforme afbeelding van U naar D. Als we de samenstelling uitschrijven vinden we

$$f(z) = \frac{e^{\frac{2\pi z}{z+2}} - i}{e^{\frac{2\pi z}{z+2}} + i}, \qquad z \in U.$$

(b) Op de strip $U_1 = \{z \mid 0 < \text{Re } z < 1\}$ is het Dirichletprobleem

$$\begin{cases} u_1 \text{ is harmonisch op } U_1 \\ u_1 \text{ is continu en begrensd op } \overline{U_1}, \\ u_1(z) = -10 \text{ als } x = \text{Re } z = 0, \\ u_1(z) = 10 \text{ als } x = \text{Re } z = 1, \end{cases}$$

eenvoudig op te lossen. De oplossing is namelijk

$$u_1(z) = 20\text{Re } z - 10.$$

Merk nu op dat f_1 uit (5) een conforme afbeelding is van U naar U_1 die $C(0,1)$ afbeeldt op $x = \text{Re } z = 0$ en $C(0,2)$ op $x = \text{Re } z = 1$. Dan zal

$$u(z) = u_1(f_1(z))$$

de gevraagde harmonische functie zijn op U. Dus

$$u(z) = 20\text{Re } f_1(z) - 10 = 20\text{Re } \frac{2z}{z+2} - 10.$$

Als $z = x + iy$ dan is

$$\begin{aligned} \frac{2z}{z+2} &= \frac{2(x+iy)}{x+iy+2} = \frac{2(x+iy)}{x+iy+2} \cdot \frac{x-iy+2}{x-iy+2} \\ &= \frac{2x(x+2)+2y^2}{(x+2)^2+y^2} + i\frac{-2xy+2y(x+2)}{(x+2)^2+y^2}. \end{aligned}$$

en

$$\operatorname{Re}\frac{2z}{z+2} = \frac{2x(x+2)+2y^2}{(x+2)^2+y^2}.$$

We krijgen dan

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 20\frac{2x(x+2)+2y^2}{(x+2)^2+y^2} - 10 \\ &= \frac{40x^2+80x+40y^2-10(x+2)^2-10y^2}{(x+2)^2+y^2} \\ &= \frac{30x^2+40x+30y^2-40}{(x+2)^2+y^2}. \end{aligned}$$

[Ter controle is het goed om na te gaan dat $u(0,0) = \frac{-40}{4} = -10$ en $u(2,0) = \frac{160}{16} = 10$ hetgeen de juiste waarden zijn. Voor $u(-2,0)$ krijg je een onbepaalde vorm.]

Vraag 4 In deze opgave is U een open en samenhangende deelverzameling van $\mathbb{C}$.

We nemen aan dat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van holomorfe functies op U is die uniform begrensd is op U. Dat wil zeggen

$$\exists M > 0 : \forall z \in U : \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(z)| \leq M.$$

(a) Bewijs dat de rij van afgeleiden $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ uniform begrensd is op elk compact deel K van U.

Is de rij van afgeleiden $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ook uniform begrensd op U? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(b) Neem aan dat dat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ bestaat voor alle $z \in A$ waarbij $A \subset U$ een deelverzameling van U is met een ophopingspunt in U.

Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ bestaat voor alle $z \in U$ en dat de limietfunctie

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

holomorf is op U.

Antwoord (a) Dit berust op de Cauchyafschatting (zie Theorem 3.4.1 uit het boek die zegt dat als f holomorf is op U met $|f| \leq M$ op U en $\overline{D}(z,r) \subset U$ dan geldt

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Zij K een compact deel van U. We hebben het volgende eenvoudige topologische lemma nodig.

Lemma: Er is een $r > 0$ zodanig dat $\overline{D(z,r)} \subset U$ geldt voor elke $z \in K$.

De eenvoudigste manier om in te zien dat dit lemma juist is is waarschijnlijk de volgende. We mogen wel aannemen dat $U \neq \mathbb{C}$ (anders is het te bewijzene triviaal). Dan is ∂U een niet-lege gesloten deel van $\mathbb{C}$. Voor elke $z \in U$ is

$$\mathrm{dist}(z, \partial U) = \min\{|z - w| \mid w \in \partial U\}$$

dan een strikt positief getal dat continu afhangt van z. De continue functie $z \mapsto \mathrm{dist}(z, \partial U)$ bereikt haar infimum op de compacte verzameling K. Dit infimum is dus een minimum en het is strikt positief. Noem het infimum r. Dan voldoet r aan de uitspraak van het Lemma.

Zij nu (f_n) zoals gegeven in de opgave. Neem M met

$$|f_n(z)| \leq M \qquad \text{voor alle } z \in U \text{ en } n \in \mathbb{N}.$$

Zij K een compact deel van U en neem r zodanig dat $\overline{D(z,r)} \subset U$ geldt voor elke $z \in K$. Met de Cauchyafschatting volgt dan dat voor $z \in K$

$$|f_n'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Deze afschatting is onafhankelijk van n en dus is de rij van afgeleiden uniform begrensd op K.

De rij van afgeleiden is niet noodzakelijk uniform begrensd op U. Er zijn tal van tegenvoorbeelden te geven. Een eenvoudig voorbeeld is de rij (f_n) met

$$f_n(z) = z^n$$

op de eenheidsschijf $D = D(0,1)$. Het is duidelijk dat $|f_n(z)| \leq 1$ voor $z \in D$. Dus de rij is uniform begrensd op D. Voor de afgeleide geldt

$$f_n'(z) = nz^{n-1}$$

en vanwege de factor n is de rij van afgeleiden niet uniform begrensd op D.

Andere mogelijke voorbeelden zijn de rij van functies (e^{-nz}) op het rechterhalfvlak $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$ of de rij van functies $((z+1+\frac{1}{n})^{1/2})$ op de eenheidsschijf D.

(b) We gebruiken hier de stelling van Montel (Theorem 6.5.3 uit het boek). Uit de stelling van Montel volgt dat er een deelrij $(f_{n_k})_k$ van $(f_n)_n$ bestaat die convergeert naar een holomorfe functie f op U.

Omdat $(f_n(z))_n$ convergeert voor $z \in A$ en de deelrij $(f_{n_k}(z))_k$ convergeert naar $f(z)$ zal gelden dat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \qquad \text{voor elke } z \in A. \tag{8}$$

De bewering is nu dat de rij $(f_n(z))_n$ convergeert naar $f(z)$ voor elke $z \in U$. Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Stel dat er een $z_0 \in U$ is waarvoor $(f_n(z_0))_n$ niet convergeert naar $f(z_0)$. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \geq \varepsilon$$

geldt voor oneindig veel $n \in \mathbb{N}$. Dan is er een andere deelrij $(f_{n'_k})_k$ van (f_n) waarvoor geldt dat

$$|f_{n'_k}(z_0) - f(z_0)| \geq \varepsilon \qquad \text{voor alle } k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Op deze deelrij passen we nog eens de stelling van Montel toe. Deze deelrij heeft op zijn beurt een deelrij die convergeert naar een holomorfe functie g op U. Vanwege (9) geldt zeker

$$g(z_0) \neq f(z_0). \tag{10}$$

Anderzijds is de deelrij die convergeert naar g ook een deelrij van de oorspronkelijke rij (f_n). Vanwege (8) geldt dan

$$g(z) = f(z) \qquad \text{voor elke } z \in A. \tag{11}$$

We krijgen nu een tegenspraak vanwege de identiteitsstelling voor holomorfe functies. Immers, f en g zijn twee holomorfe functies op U, die vanwege (11) overeenkomen op A. Aangezien A een ophopingspunt heeft in U en aangezien U samenhangend is geeft de identiteitsstelling dat $f = g$ op U. Dit is in tegenspraak met (10).

Uit de tegenspraak volgt dat $(f_n(z))_n$ naar $f(z)$ convergeert voor elke $z \in U$. We hebben al gezien (uit de stelling van Montel) dat f holomorf is. Hiermee is onderdeel (b) volledig bewezen.