Examen Complexe Analyse
vrijdag 21 juni 2013, 14:00–18:00 uur
Auditorium De Molen

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 schriftelijke vragen.
- Elke vraag telt even zwaar mee. Er is een bonusvraag waarvoor u extra punten kunt verdienen.
- Het boek "Function Theory of one Complex Variable" van Greene & Krantz mag gebruikt worden, evenals de extra beschikbaar gestelde nota's.
- Uitgewerkte oefeningen en ander materiaal uit de oefenzitting mag niet gebruikt worden.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Kladpapier wordt niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Succes!

Vraag 1 Zij $a \in \mathbb{R}$ en

$$f(z) = \frac{e^{2az}}{\cosh z} \qquad \text{met} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

3 pt (a) Zij $R > 0$ en γ_R de rand van de rechthoek met hoekpunten $-R$, R, $R + \pi i$ en $-R + \pi i$, in deze volgorde doorlopen. Bereken $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$.

2 pt. (b) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ax}}{\cosh x}\, dx$$

convergent?

5 pt (c) Laat zien dat, voor de waarden van a die u in (b) gevonden hebt, de integraal gelijk is aan $\dfrac{\pi}{\cos \pi a}$.

Antwoord: (a) We onderzoeken eerst de nulpunten van de noemer $\cosh z$ in de definitie van $f(z)$.

Er geldt dat $\cosh z = 0$ betekent dat $e^z + e^{-z} = 0$ en dus dat $e^{2z} = -1$. Als $z = x + iy$ dan vinden we $e^{2x} e^{2iy} = -1$. Door te kijken naar absolute waarde en argument volgt dan $e^{2x} = 1$, zodat $x = 0$, en $2y = \pi + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. De nulpunten zijn bijgevolg $\frac{\pi i}{2} + k\pi i$ met $k \in \mathbb{Z}$. Deze nulpunten zijn polen van f.

De pool $\frac{\pi i}{2}$ bevindt zich binnen de contour γ_R. De andere polen van f liggen er buiten. Uit de residustelling volgt dus dat

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_f \left(\frac{\pi i}{2} \right).$$

De pool is enkelvoudig en er geldt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_f \left(\frac{\pi i}{2} \right) &= \lim_{z \to \frac{\pi i}{2}} (z - \tfrac{\pi i}{2}) f(z) = e^{a\pi i} \lim_{z \to \frac{\pi i}{2}} \frac{z - \frac{\pi i}{2}}{\cosh z} \\ &= e^{a\pi i} \frac{1}{\sinh \frac{\pi i}{2}} \end{aligned}$$

want sinh is de afgeleide van cosh (we gebruiken de regel van de l'Hopital). Omdat $\sinh \frac{\pi i}{2} = i$ volgt uiteindelijk dat

$$\operatorname{Res}_f\left(\frac{\pi i}{2}\right) = -ie^{a\pi i}$$

en

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i(-i)e^{a\pi i} = 2\pi e^{a\pi i}.$$

(b) De integrand $\frac{2e^{2ax}}{e^x+e^{-x}}$ gedraagt zich voor $x \to +\infty$ als e^{2ax-x}. Hieruit volgt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2ax}}{e^x + e^{-x}} = \begin{cases} 0 & \text{als } 2a < 1, \\ 2 & \text{als } 2a = 1, \\ +\infty & \text{als } 2a > 1. \end{cases}$$

In de laatste twee gevallen is de oneigenlijke integraal divergent want de functie is niet integreerbaar op $+\infty$.

Net zo geldt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{2ax}}{e^x + e^{-x}} = \begin{cases} 0 & \text{als } 2a > -1, \\ 2 & \text{als } 2a = -1, \\ +\infty & \text{als } 2a < -1 \end{cases}$$

en we concluderen dat de oneigenlijke integraal divergent is als $2a \leq -1$.

Het overblijvende geval is $-1 < 2a < 1$, ofwel $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$. In dat geval gaat de functie naar 0 op zowel $+\infty$ als $-\infty$ en er is sprake van exponentiële afname. Dan is de oneigenlijke integraal convergent.

(c) We nemen dus aan dat $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$. Uit onderdeel (a) weten we al dat voor $R > 0$

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi e^{a\pi i}.$$

De integraal splitst zich op in vier stukken, namelijk

$$I_1 = \int_{-R}^{R} f(x)dx, \qquad I_2 = \int_{R}^{R+\pi i} f(z)dz,$$
$$I_3 = \int_{R+\pi i}^{-R+\pi i} f(z)dz, \qquad I_4 = \int_{-R+\pi i}^{-R} f(z)dz$$

waarbij elke integraal genomen is langs een horizontaal of verticaal lijnstuk.

Voor I_3 draaien we eerste de integratiegrenzen om en dan nemen we de parametrisatie $z = x + \pi i$, $-R < x < R$. Er volgt

$$I_3 = -\int_{-R}^{R} f(x + \pi i) dx.$$

Merk op dat

$$\cosh(x + \pi i) = \frac{e^{x+\pi i} + e^{-x-\pi i}}{2} = \frac{-e^x - e^{-x}}{2} = -\cosh x$$

en

$$e^{2a(x+\pi i)} = e^{2ax} e^{2a\pi i},$$

zodat

$$f(x + \pi i) = -e^{2a\pi i} f(x).$$

Dat betekent dat

$$I_3 = e^{2a\pi i} \int_{-R}^{R} f(x) dx = e^{2a\pi i} I_1.$$

Voor I_2 vinden we uit de ML afschatting

$$|I_2| \leq \pi \max_{y \in [0,\pi]} |f(R + iy)|.$$

Er geldt als $z = R + iy$,

$$\left| e^{2az} \right| = e^{2aR}$$

en vanwege de omgekeerde driehoeksongelijkheid

$$|\cosh z| = \left| \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right| \geq \frac{|e^z| - |e^{-z}|}{2} = \frac{e^R - e^{-R}}{2}.$$

Bijgevolg is

$$|f(R + iy)| \leq \frac{2e^{2aR}}{e^R - e^{-R}}$$

en dus

$$|I_2| \leq 2\pi \frac{e^{2aR}}{e^R - e^{-R}}.$$

Omdat $a < \frac{1}{2}$ volgt dat

$$|I_2| \to 0 \qquad \text{als } R \to +\infty.$$

Omdat $a > -\frac{1}{2}$ volgt op dezelfde manier dat

$$|I_4| \to 0 \qquad \text{als } R \to +\infty.$$

De conclusie is dat

$$2\pi e^{a\pi i} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (1 + e^{2a\pi i})I_1 + I_2 + I_4.$$

We laten hierin $R \to +\infty$. Dan $I_2 \to 0$, $I_4 \to 0$ en I_1 gaat naar de gevraagde integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Er volgt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{2\pi e^{a\pi i}}{1 + e^{2a\pi i}}.$$

Vermenigvuldig teller en noemer met $e^{-a\pi i}$ en er volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{2\pi}{e^{-a\pi i} + e^{a\pi i}} = \frac{\pi}{\cos a\pi}$$

zoals gevraagd was.

Vraag 2

5 pt (a) Neem aan dat $|a| > e$ en $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat de vergelijking $e^z = az^n$ precies n verschillende oplossingen heeft met $|z| < 1$.

5 pt (b) Zij U een gebied, $0 \in U$ en f een holomorfe functie op $U \setminus \{0\}$ die voldoet aan

$$|f(z)| \leq M|z|^{-p}, \qquad z \in U$$

voor zekere $M > 0$ en $p < 1$. Bewijs dat 0 een ophefbare singulariteit van f is.

Antwoord (a) We gaan de stelling van Rouché toepassen met $f(z) = e^z - az^n$ en $g(z) = az^n$. Er geldt

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z} \leq e \qquad \text{als } |z| = 1.$$

Omdat $|a| > e$ en $|g(z)| = a$ voor $|z| = 1$ volgt er dat

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \qquad \text{voor } |z| = 1.$$

Uit de stelling van Rouché volgt dat f en g evenveel nulpunten hebben in de open eenheidsschijf, waarbij we nulpunten tellen naar gelang de multipliciteit. Het is duidelijk dat g een n voudig nulpunt heeft in $z = 0$ en verder geen nulpunten. Dus f heeft n nulpunten met $|z| = 1$, waarbij we nulpunten tellen naar gelang de multipliciteit.

We laten nog zien dat de nulpunten enkelvoudig zijn. Neem aan dat z_0 een meervoudig nulpunt zou zijn. Dan geldt $f(z_0) = 0$ en $f'(z_0) = 0$. Dus $e^{z_0} - az_0^n = 0$ en $e^{z_0} - naz_0^{n-1} = 0$. Dit geeft $az_0^n = naz_0^{n-1}$. Omdat $|a| > e$ is $a \neq 0$. Ook is $z_0 \neq 0$. Dus er volgt dat $z_0 = n$, maar dan voldoet z_0 niet aan $|z_0| < 1$. De nulpunten van f in de open eenheidsschijf zijn dus enkelvoudig.

Er volgt dat $e^z = az^n$ precies n oplossingen heeft met $|z| < 1$.

(b) Er geldt

$$|zf(z)| \leq M|z|^{1-p}, \qquad z \in U$$

met $1 - p > 0$, zodat

$$\lim_{z \to \infty} zf(z) = 0$$

Dan blijft $z \mapsto zf(z)$ zeker begrensd rond $z = 0$ en er volgt dat de geïsoleerde singulariteit in $z = 0$ ophefbaar is. Er is dus een machtreeks

$$zf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad z \in D(0, r),$$

met $c_0 = \lim_{z\to 0} zf(z) = 0$, die convergent is in een zekere schijf $D(0,r)$ rond de oorsprong. Dus

$$zf(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \qquad z \in D(0,r),$$

en na deling door z volgt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n, \qquad z \in D(0,r) \setminus \{0\}.$$

Bijgevolg is f de som van een convergente machtreeks en de geïsoleerde singulariteit is dus ophefbaar.

LET OP: Dit argument werkt niet als je werkt met $z^p f(z)$ in plaats van $zf(z)$. p is namelijk niet noodzakelijk geheel en dus is $z = 0$ niet een geïsoleerde singulariteit van $z \mapsto z^p f(z)$ en je kunt hierop de stelling over ophefbare singulariteiten niet toepassen.

Een andere methode is de volgende. Er geldt dat f een Laurentreeks heeft

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in D(0,r) \setminus \{0\},$$

met

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Hierin kunnen we een willekeurige $\varepsilon \in (0,r)$ nemen. Uit de ML afschatting volgt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot (2\pi\varepsilon) \cdot \frac{\max_{|z|=\varepsilon} |f(z)|}{\varepsilon^{n+1}} = \max_{|z|=\varepsilon} |f(z)| \cdot \varepsilon^{-n}.$$

Uit de gegeven ongelijkheid in de opgave volgt

$$\max_{|z|=\varepsilon} |f(z)| \leq M\varepsilon^{-p},$$

zodat

$$|a_n| \leq M\varepsilon^{-p-n}.$$

Omdat $p < 1$ is $-p-n > 0$ voor elke $n \leq -1$. Als we dan $\varepsilon \to 0+$ nemen, dan volgt

$$a_n = 0 \qquad \text{voor elke } n \leq -1.$$

Dit betekent dat alle termen in de Laurentreeks met strikt negatieve n wegvallen. We houden een machtreeks over

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

en de singulariteit is ophefbaar.

Vraag 3 Beschouw het gebied $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < \sqrt{2}, \text{Im } z > 0\}$.

3 pt (a) Schets U en geef een Möbiustransformatie f die U afbeeldt op een sector

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \alpha\}$$

voor zekere $\alpha > 0$. Wat is α ?

4 pt (b) Bepaal een conforme afbeelding φ van U naar de eenheidsschijf $D(0, 1)$. Zorg er voor dat $\varphi(i) = 0$.

3 pt (c) Neem aan dat $F : U \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie is met $F(i) = 0$ en $|F(z)| < 1$ voor elke $z \in U$. Bewijs dat

$$|F(z)| \leq |\varphi(z)|, \qquad \text{voor alle } z \in U,$$

waarin φ de conforme afbeelding uit onderdeel (b) is.

Antwoord (a) U is het deel van de schijf rond i met straal $\sqrt{2}$ dat in het bovenhalfvlak ligt. De rand van U bestaat uit het interval $[-1, 1]$ en een cirkelboog van 1 naar -1 die de imaginaire as snijdt in $(1 + \sqrt{2})i$.

De Möbiustranformatie

$$f(z) = \frac{z + 1}{1 - z}$$

beeldt $z = -1$ af op 0 en $z = 1$ op ∞. Het interval $[-1, 1]$ gaat naar de positieve reële as en de cirkel $C(i, \sqrt{2})$ gaat naar een rechte door de oorsprong en door het punt

$$f((1 + \sqrt{2})i) = \frac{1 + (1 + \sqrt{2})i}{1 - (1 + \sqrt{2}i} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i.$$

Dit is dus de rechte met Cartesische vergelijking $y = -x$.

Het deel van de cirkel in het bovenhalfvlak wordt afgebeeld op de halfrechte $y = -x$ met $y \geq 0$. Het gebied U gaat naar de sector S begrensd door de positieve x-as en deze halfrechte. De hoek tussenn de twee halfrechten is $3\pi/4$. Dus

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \alpha\} \quad \text{met} \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

(b) We weten al dat $f : U \to S$ een conforme afbeelding is van U naar S.

De afbeelding

$$g : z \mapsto z^{4/3}$$

beeldt S af op het bovenhalfvlak $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

De Cayleyafbeelding

$$k : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

beeldt $\mathbb{C}^+$ vervolgens af naar de eenheidsschijf. Dus $k \circ g \circ f$ is een conforme afbeelding van U naar $D(0, 1)$. Er geldt $f(i) = \frac{1+i}{1-i} = i$, $g(i) = e^{2\pi i/3}$ en $W(e^{2\pi i/3}) = \frac{e^{2\pi i/3} - i}{e^{2\pi i/3} + i} \neq 0$. Dus $k \circ g \circ f$ is nog niet de gevraagde φ want i wordt niet afgebeeld naar 0.

De Möbiustransformatie

$$h : z \mapsto \frac{z + 1/2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

beeldt $\mathbb{C}^+$ af naar $\mathbb{C}^+$ en $h(e^{2\pi i/3}) = i$. Dan is

$$\varphi = k \circ h \circ g \circ f$$

de gevraagde conforme afbeelding met $\varphi(i) = 0$.

N.B.: Er zijn ook andere manieren om er voor te zorgen dat $\varphi(i) = 0$. Je kunt ook gebruik maken van de automorfisme $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ met $|a| < 1$. Als je $a = (k \circ g \circ f)(i)$ neemt dan kun je ook nemen

$$\varphi = \varphi_a \circ k \circ g \circ f$$

(c) Omdat φ een conforme afbeelding is van U naar $D(0, 1)$ bestaat de inverse functie $\varphi^{-1} : D(0, 1) \to U$ en deze is ook holomorf. Dan is $F \circ \varphi^{-1}$ holomorf en omdat $|F(z)| < 1$ kunnen we dit zien als een functie van $D(0, 1)$ naar $D(0, 1)$. Tevens is

$$\left(F \circ \varphi^{-1}\right)(0) = F(i) = 0,$$

want $\varphi^{-1}(0) = i$ en $F(i) = 0$.

Uit het lemma van Schwarz volgt dan dat

$$|(F \circ \varphi^{-1})(w)| \leq |w|$$

voor elke $w \in D(0, 1)$. Als nu $z \in U$ dan is $w = \varphi(z) \in U$ en er volgt

$$|F(z)| = |(F \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)(z)| = |(F \circ \varphi^{-1})(w)| \leq |w| = |\varphi(z)|$$

hetgeen te bewijzen was.

Vraag 4 In deze opgave mag u gebruiken dat de gammafunctie gegeven door

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad \text{Re } z > 0$$

geen nulpunten heeft voor Re $z > 0$.

3 pt (a) Neem $n \in \mathbb{N}$. Bepaal het grootst mogelijk gebied U in $\mathbb{C}$ waartoe de functie

$$z \mapsto \frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z+1)^2}$$

een analytische voortzetting heeft. Laat zien dat de analytische voortzetting polen heeft in de gehele getallen $0, 1, \ldots, n$.

2 pt (b) Bepaal alle nulpunten van de analytische voortzetting.

5 pt (c) Beschouw voor $n \in \mathbb{N}$ en $x > 0$ de functie

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Sigma \frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z+1)^2} x^z \, dz$$

waarin Σ een positief georienteerde gesloten kromme is in het z-vlak die alle polen omsluit. Toon aan dat P_n een veelterm is van graad n.

De volgende vraag is een extra **Bonusvraag**.

5 pt (d) Laat zien dat

$$\int_0^\infty x^k P_n(x) e^{-x} \, dx = 0 \qquad \text{voor } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Antwoord (a) Omdat de gammafunctie geen nulpunten heeft is $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z+1)}$ een gehele functie op $\mathbb{C}$ met nulpunten in de polen van $z \mapsto \Gamma(z+1)$, d.w.z. met nulpunten in de strikt negatieve gehele getallen. Dan is $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z+1)^2}$ een gehele functie met dubbele nulpunten in de strikt negatieve gehele getallen $z = -1, -2, \ldots$.

De teller $z \mapsto \Gamma(z-n)$ is meromorf met polen in de getallen $n, n-1, n-2, \ldots$. De polen in $z = -1, -2, \ldots$ worden opgeheven door de nulpunten van $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z+1)^2}$ en er volgt dat $z \mapsto \frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z+1)^2}$ een analytische voortzetting heeft tot $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \ldots, n\}$ met enkelvoudige polen in $0, 1, 2, \ldots, n$.

(b) We hebben onder (a) al opgemerkt dat $z \mapsto \Gamma(z+1)$ een enkelvoudige pool heeft in $z = -1, -2, \ldots$ en dat $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z+1)^2}$ daar dubbele nulpunten heeft. Het product heeft dus een enkelvoudige nulpunten in $z = -1, -2, \ldots, -n$.

Er zijn geen andere nulpunten. Die zouden van de teller $\Gamma(z-n)$ moeten komen. Stel $\Gamma(z_0 - n) = 0$. Dan volgt uit de functionaalvergelijking $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dat ook

$$\Gamma(z_0 + 1 - n) = (z_0 - n)\Gamma(z_0 - n) = 0.$$

Met inductie is dan eenvoudig in te zien dat

$$\Gamma(z_0 + k - n) = 0 \qquad \text{voor elke} k \in \mathbb{N}.$$

Kies k zo groot dat Re $(z_0 + k - n) > 0$. Dan is $z_0 + k - n$ een nulpunt van de gammafunctie in het rechter halfvlak. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat de gammafunctie geen nulpunten heeft met Re $z > 0$. Dus er zijn inderdaad geen andere nulpunten.

(c) De integrand heeft enkelvoudige polen in $z = 0, 1, \ldots, n$ en is verder holomorf. De residustelling zegt dus dat

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Res}_f(j)$$

met

$$f(z) = \frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z+1)^2}\, x^z.$$

De polen zijn enkelvoudig, zodat

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_f(j) &= \lim_{z\to j}(z-j)f(z) \\ &= \left(\lim_{z\to j}(z-j)\Gamma(z-n)\right)\frac{x^j}{(j!)^2}. \end{aligned}$$

Het residu van de gammafunctie in $z = -k$ is gelijk aan $(-1)^k \frac{1}{k!}$. Dan is

$$\lim_{z\to j}(z-j)\Gamma(z-n) = \lim_{z\to j-n}\Gamma(z) = \mathrm{Res}_\Gamma(-n+j) = (-1)^{n-j}\frac{1}{(n-j)!}.$$

Dus

$$\mathrm{Res}_f(j) = (-1)^{n-j}\frac{x^j}{(n-j)!(j!)^2}$$

en

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{Res}_f(j) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\frac{x^j}{(n-j)!(j!)^2}$$

Dit is inderdaad een veelterm van graad n.