Examen Wiskunde II
Bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie, Informatica
maandag 11 juni 2012

Vraag 1 Zij $p \in \mathbb{R}$ en

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}.$$

(a) Voor welke waarden van p is de matrix A inverteerbaar?
[U hoeft de inverse matrix A^{-1} niet uit te rekenen.]

(b) Bepaal p zodanig dat de drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ onderling loodrecht staan.

(c) Bepaal alle waarden van p waarvoor het stelsel

$$A\vec{x} = \vec{x}$$

een oplossing $\vec{x} \neq \vec{0}$ heeft.

Antwoord:

(a) Het vectorproduct is

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zodat de matrix A gelijk is aan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & p+2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & p & 1 \end{pmatrix}.$$

De determinant van A is (berekend met de regel van Sarrus)

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & p+2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & p & 1 \end{vmatrix} &= 1 + p(p+2) + 2(p+2) + 1 \\ &= p^2 + 4p + 6 = (p+2)^2 + 2. \end{aligned}$$

Voor een reële waarde van p is de determinant niet nul. Bijgevolg is de matrix A inverteerbaar voor elke $p \in \mathbb{R}$.

[Opmerking: De twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn lineair onafhankelijk. Uit de eigenschappen van het vectorproduct volgt dat $\vec{c}$ een niet-nul vector is die loodrecht staat op $\vec{a}$ en $\vec{b}$. De drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zijn dan ook lineair onafhankelijk. De matrix A heeft dus lineair onafhankelijke kolommen en is bijgevolg inverteerbaar.]

(b) Het scalair product van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - p$ en dit is nul als en slechts als $p = 2$. Er volgt dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht staan als en slechts als $p = 2$. Het is een eigenschap van het vectorproduct dat $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ loodrecht op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ staat. [Je kunt dit ook nog eens apart nagaan in dit geval door de scalaire producten uit te rekenen.] Dus de drie vectoren zijn onderling loodrecht als en slechts als $p = 2$.

(c) Een niet-triviale oplossing van $A\vec{x} = \vec{x}$ is een eigenvector $\vec{x}$ van A bij de eigenwaarde 1. Er is dus een niet-triviale oplossing als en slechts als 1 een eigenwaarde is van A en dit is het geval als en slechts als $\det(A - I) = 0$.

We berekenen

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & p+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & p & 0 \end{vmatrix} = 1 + p(p+2) + (p+2) + p \\ &= p^2 + 4p + 3 = (p+2)^2 - 1. \end{aligned}$$

Dit is gelijk aan nul als $(p+2)^2 = 1$ hetgeen leidt tot $p = -1$ of $p = -3$.

Vraag 2 Zij

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} q \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

met $q \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal q zodanig dat de drie vectoren linear afhankelijk zijn.

(b) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix}$$

voor de waarde van q die u in (a) gevonden hebt. Is de matrix B diagonaliseerbaar?

Antwoord:

(a) De drie vectoren zijn lineair afhankelijk als en slechts $\det B = 0$ met

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 11 & q \\ -3 & 9 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De determinant is

$$\begin{aligned} \det B = \begin{vmatrix} -5 & 11 & q \\ -3 & 9 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= -90 - 66 + 3q - 9q + 30 + 66 \\ &= -60 - 6q. \end{aligned}$$

Dit is gelijk aan 0 voor $q = -10$. In dat geval zijn de vectoren lineair afhankelijk. Voor alle andere waarden van q zijn de vectoren lineair onafhankelijk.

[Opmerking: Als $q = -10$ dan is

$$2\vec{b}_1 = \vec{b}_3$$

zodat dan inderdaad de vectoren lineair afhankelijk zijn.]

(b) We nemen $q = -10$ en

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 11 & -10 \\ -3 & 9 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Van onderdeel (a) weten we al dat de kolommen van B lineair afhankelijk zijn en dus is 0 een eigenwaarde van B. Als je had gevonden dat $2\vec{b}_1 = \vec{b}_3$ dan had je ook al een eigenvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ kunnen zien. We zullen dit echter niet gebruiken en de eigenwaarden en eigenvectoren "normaal" uitrekenen.

De karakteristieke veelterm van B is

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \begin{pmatrix} -5-\lambda & 11 & -10 \\ -3 & 9-\lambda & -6 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-5-\lambda)(9-\lambda)(2-\lambda) - 66 - 30 + 10(9-\lambda) - 6(-5-\lambda) + 33(2-\lambda) \\
&= -90 + 37\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 96 + 90 - 10\lambda + 30 + 6\lambda + 66 - 33\lambda \\
&= 6\lambda^2 - \lambda^3 \\
&= \lambda^2(6-\lambda).
\end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn $\lambda = 0$ en $\lambda = 6$ waarbij $\lambda = 0$ een dubbele eigenwaarde is.

De eigenvectoren bij $\lambda = 0$ vinden we door het stelsel $B\vec{x} = \vec{0}$ op te lossen. We vinden

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -5 & 11 & -10 & | & 0 \\ -3 & 9 & -6 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ -3 & 9 & -6 & | & 0 \\ -5 & 11 & -10 & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2+3R_1,\, R_3+5R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Met achterwaartse substitutie vinden we $x_3 = t$, $x_2 = 0$, $x_1 = -2t$. De eigenvectoren bij $\lambda = 0$ zijn

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},\, t \neq 0.$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 6$ vinden we door het stelsel $(B - 6I)\vec{x} = \vec{0}$ op te lossen. We vinden

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -11 & 11 & -10 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 0 \\ -11 & 11 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+3R_1, R_3+11R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -54 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{18}R_2, -\frac{1}{54}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De oplossingen zijn $x_3 = 0$, $x_2 = t$, $x_1 = t$. De eigenvectoren bij $\lambda = 6$ zijn

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Er zijn maar twee lineair onafhankelijke eigenvectoren van B, namelijk $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De matrix is **niet** diagonaliseerbaar.

Vraag 3 Bij een chemische reactie $A + 2B \to 3C$ voldoen de concentraties $a(t)$, $b(t)$ en $c(t)$ van de stoffen A, B en C aan de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{da}{dt} = -rab^2, \quad \frac{db}{dt} = -2rab^2, \quad \frac{dc}{dt} = 3rab^2$$

met $r > 0$ de reactieconstante. We nemen beginwaarden

$$a(0) = 1, \quad b(0) = 2, \quad \text{en} \quad c(0) = 0.$$

(a) Laat zien dat $b-2a$ en $c+3a$ constant zijn in de tijd. Wat zijn die constante waarden?

(b) Laat zien dat de differentiaalvergelijking voor a geschreven kan worden als

$$\frac{da}{dt} = -4ra^3$$

en los deze differentiaalvergelijking op.

(c) Bereken

$$\lim_{t\to+\infty} c(t).$$

Antwoord:

(a) Er geldt

$$\frac{d}{dt}(b-2a) = \frac{db}{dt} - 2\frac{da}{dt} = -2rab^2 + 2rab^2 = 0$$

en

$$\frac{d}{dt}(c+3a) = \frac{dc}{dt} + 3\frac{da}{dt} = 3rab^2 - 3rab^2 = 0.$$

De afgeleiden zijn 0 en daarom zijn $b-2a$ en $c+3a$ constant in de tijd. Uit de beginwaarden vinden we dat $b(0) - 2a(0) = 0$ en $c(0) + 3a(0) = 3$ en geldt

$$b(t) - 2a(t) = 0, \qquad c(t) + 3a(t) = 3$$

voor alle t.

(b) Uit (a) volgt dat $b = 2a$. We vervangen b door $2a$ in de DV voor a en we vinden

$$\frac{da}{dt} = -ra(2a)^2 = -4ra^3.$$

Deze DV lossen we op met scheiding van veranderlijken. Er geldt

$$\frac{da}{a^3} = -4rdt$$

hetgeen na integratie leidt tot

$$\int \frac{da}{a^3} = -4r \int dt = -4rt + C_1.$$

De linkerkant is

$$\int a^{-3} da = -\tfrac{1}{2}a^{-2} + C_2$$

en dus

$$-\tfrac{1}{2}a^{-2} = -4rt + C$$

waarin $C = C_1 - C_2$ een nieuwe constante is. Voor $t = 0$ geldt $a = 1$ zodat $-\frac{1}{2} = C$. Dit bepaalt de constante C en

$$-\tfrac{1}{2}a^{-2} = -4rt - \frac{1}{2}.$$

Hieruit lossen we a op door eerst met -2 te vermenigvuldigen

$$a^{-2} = 8rt + 1$$

en daarna de $-1/2$de macht te nemen. We vinden

$$a = \frac{1}{\sqrt{8rt + 1}}.$$

(c) Uit de formule voor a vinden we

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\sqrt{8rt + 1}} = 0.$$

Omdat $c + 3a = 3$, zie onderdeel (a), vinden we

$$\lim_{t \to +\infty} c(t) = \lim_{t \to \infty} (3 - 3a(t)) = 3 - 0 = 3.$$

Vraag 4 In een gebied met marters en woelmuizen ontwikkelen de twee populaties zich volgens de vergelijkingen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{3xy}{x+1} \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + \frac{3xy}{x+1}\end{aligned}$$

met $K > 0$.

(a) Welke van de twee veranderlijken x en y heeft betrekking op de populatie van de marters (de roofdieren) en welke op die van de woelmuizen (de prooidieren) ?

(b) Bereken de evenwichtspunten van dit stelsel. Voor welke $K > 0$ is er een evenwicht (x_0, y_0) met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$?

De verdere vragen betreffen het evenwichtspunt uit onderdeel (b) met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$.

(c) Laat zien dat het gelineariseerde stelsel voor dit evenwicht gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} \xi'(t) \\ \eta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2K-10}{3K} & -2 \\ \frac{K-2}{3K} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

(d) Voor welke K treedt spiraliserend gedrag op van de oplossingen rond het evenwichtspunt?

(e) Onderzoek de stabiliteit van het evenwichtspunt. U mag u hierbij beperken tot de waarden van K waarvoor spiraliserend gedrag optreedt.

Antwoord:

(a) Bij afwezigheid van y voldoet x aan $\frac{dx}{dt} = x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$. Dit is een model voor logistieke groei. De aanwezigheid van y heeft een negatief effect op de ontwikkeling vanwege de term $-\frac{3xy}{x+1}$ die negatief is als $x, y > 0$.

Bij afwezigheid van x voldoet y aan $\frac{dy}{dt} = -2y$, hetgeen het model is voor exponentiële afname. De aanwezigheid van x heeft een positief effect op de ontwikkeling van y vanwege de positieve term $\frac{3xy}{x+1}$.

Dit alles wijst er op dat x de populatie van de prooidieren voorstelt en y die van de roofdieren.

(b) Een evenwichtspunt voldoet aan de twee vergelijkingen $F(x,y) = x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{3xy}{x+1} = 0$ en $G(x,y) = -2y + \frac{3xy}{x+1} = 0$.

Aan de tweede vergelijking wordt voldaan als $y = 0$ of als $-2 + \frac{3x}{x+1} = 0$ en dit laatste betekent $x = 2$.

Als $y = 0$ dan volgt uit de eerste vergelijking $x\left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0$ en dus $x = 0$ of $x = K$. We vinden twee evenwichtspunten $(0,0)$ en $(K,0)$.

Als $x = 2$ dan volgt uit de eerste vergelijking $2(1 - \frac{2}{K}) - \frac{6y}{3} = 0$, ofwel $y = 1 - \frac{2}{K}$. Er is dus nog een derde evenwichtspunt $(2, 1 - \frac{2}{K})$.

Als $K > 2$ dan is $1 - \frac{2}{K} > 0$. In dat geval is $(x_0, y_0) = (2, 1 - \frac{2}{K})$ een evenwichtspunt met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$. Als $K \leq 2$ is er geen evenwichtspunt met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$.

(c) Om het gelineariseerde stelsel op te stellen berekenen we eerst de partiële afgeleiden van F en G:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \left(1 - \frac{x}{K}\right) - x\frac{1}{K} - \frac{3y(x+1) - 3xy}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x}{K} - \frac{3y}{(x+1)^2}, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{3x}{x+1}, \\
\frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{3y(x+1) - 3xy}{(x+1)^2} = \frac{3y}{(x+1)^2}, \\
\frac{\partial G}{\partial y} &= -2 + \frac{3x}{x+1}.
\end{aligned}$$

In het evenwichtspunt $x_0 = 2$, $y_0 = 1 - \frac{2}{K}$ geeft dit de waarden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 1 - \frac{4}{K} - \frac{3(1 - \frac{2}{K})}{9} = 1 - \frac{4}{K} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3K} = \frac{2K - 10}{3}, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -2, \\
\frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3K} = \frac{K-2}{3K}, \\
\frac{\partial G}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

en bijgevolg de matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2K-10}{3K} & -2 \\ \frac{K-2}{3K} & 0 \end{pmatrix}.$$

Het gelineariseerde systeem is dan inderdaad zoals het staat in de opgave.

(d) Spiraliserend gedrag van de oplossingen rond het evenwichtspunt treedt op als de matrix uit (c) niet-reële eigenwaarden heeft. De karakteristieke veelterm is

$$\begin{vmatrix} \frac{2K-10}{3K} - \lambda & -2 \\ \frac{K-2}{3K} & -\lambda \end{vmatrix} = (\frac{2K-10}{3K} - \lambda)(-\lambda) + 2\frac{K-2}{3K} = \lambda^2 - \frac{2K-10}{3K}\lambda + \frac{2K-4}{3K}.$$

De discriminant hiervan is

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{2K-10}{3K}\right)^2 - 4\frac{2K-4}{3K} = \frac{(2K-10)^2}{9K^2} - \frac{8K-16}{3K} \\
&= \frac{4K^2 - 40K + 100 - 24K^2 + 48K}{9K^2} = \frac{-20K^2 + 8K + 100}{9K^2} \\
&= \frac{4}{9K^2}(-5K^2 + 2K + 25).
\end{aligned}$$

De discriminant is negatief als $-5K^2 + 2K + 25 < 0$. De nulpunten van de kwadratische veelterm in K zijn

$$K_1 = \frac{-2 + \sqrt{504}}{-10} = \frac{1}{5} - \frac{3\sqrt{14}}{5}, \qquad K_2 = \frac{-2 - \sqrt{504}}{-10} = \frac{1}{5} + \frac{3\sqrt{14}}{5}.$$

Voor K tussen deze waarden is de discriminant positief en daarbuiten is ze negatief. Omdat we al werken onder de veronderstelling dat $K > 2$ (zie onderdeel (b)) komt $K < K_1$ niet in aanmerking. De conclusie is dat er spiraliserend gedrag is voor $K > K_2 \approx 2.445\cdots$

(e) We nemen dus $K > K_2$. Bij (d) hebben we reeds de karakteristieke veelterm berekend:

$$\begin{vmatrix} \frac{2K-10}{3K} - \lambda & -2 \\ \frac{K-2}{3K} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{2K-10}{3K}\lambda + \frac{2K-4}{3K}.$$

De discriminant D is negatief en bijgevolg zijn de eigenwaarden

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{2K-10}{3K} \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{K-5}{3K} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{-D}.$$

De twee eigenwaarden zijn niet-reëel en ze zijn elkaars complex toegevoegde in het complexe vlak. Het reële deel van beide eigenwaarden is

$$\mathrm{Re}\ \lambda_{1,2} = \frac{K-5}{3K}$$

hetgeen strikt kleiner dan nul is als en slechts als $K < 5$. Voor $K < 5$ is het evenwichtspunt stabiel en voor $K > 5$ is het evenwichtspunt niet stabiel.

Vraag 5 (niet voor geografie) We beschouwen de functie

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{als } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

en haar Fouriergetransformeerden $u(y)$ en $v(y)$ in de goniometrische vorm zoals gegeven door formules (5.2.3) uit de cursus.

(a) Laat zien dat

$$v(y) = \frac{2}{\pi} \frac{y}{1-y^2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

(b) Bepaal $u(y)$.

(c) Gebruik (a) en (b) om de integraal

$$\int_0^\infty \frac{y \sin(\pi y)}{1-y^2} dy$$

te berekenen.

[Hint: Denk aan de inverse Fouriertransformatie (5.2.4) en bedenk ook dat $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.]

Antwoord:

(a) De formule voor v is

$$v(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xy) dx.$$

Uit het voorschrift voor f volgt dat we de integraal kunnen beperken tot het interval $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, omdat de functie daar buiten 0 is. Dus

$$v(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin(xy) dx.$$

Voor elke vaste y is $\sin x \sin(xy)$ een even functie van x. Het is dan handig om over te gaan naar twee keer de integraal over $[0, \frac{\pi}{2}[$:

$$v(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin(xy) dx.$$

Deze stap is niet noodzakelijk, maar het vermindert de kans op rekenfouten.

Er zijn nu twee mogelijkheden om de integraal verder uit te rekenen. Ofwel met partiële integratie, ofwel met een formule van Simpson.

Eerste manier: We stellen

$$I = \int \sin x \sin(xy) dx$$

en we gaan partieel integreren door $\sin x$ te primitiveren. Dus $u = \sin(xy)$, $\frac{dv}{dx} = \sin x$, $\frac{du}{dx} = y\cos(xy)$, $v = -\cos x$ en

$$I = \int u dv = uv - \int v du = -\cos x \sin(xy) + y \int \cos x \cos(xy) dx.$$

We passen weer partiële integratie toe, nu met $u = \cos(xy)$, $\frac{dv}{dx} = \cos x$, $\frac{du}{dx} = -y\sin(xy)$, $v = \sin x$. Er volgt

$$I = -\cos x \sin(xy) + y\left[\sin x \cos(xy) + y \int \sin x \sin(xy) dx\right].$$

We zien hier de oorspronkelijke integraal I weer terugkeren, namelijk

$$I = -\cos x \sin(xy) + y \sin x \cos(xy) + y^2 I,$$

waaruit volgt

$$I - y^2 I = -\cos x \sin(xy) + y \sin x \cos(xy)$$

en dus

$$I = \frac{-\cos x \sin(xy) + y \sin x \cos(xy)}{1 - y^2}.$$

Dit is de onbepaalde integraal. Voor $v(y)$ vinden we dan

$$v(y) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos x \sin(xy) + y \sin x \cos(xy)}{1 - y^2}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}.$$

Omdat $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ en $\sin(0) = 0$, volgt hieruit

$$v(y) = \frac{2}{\pi}\frac{y}{1 - y^2}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

zoals ook gegeven in de opgave.

Tweede manier: De tweede manier is om gebruik te maken van een goniometrische formule van Simpson

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}\left[\cos(p - q) - \cos(p + q)\right]$$

die het product van twee sinussen omzet in een verschil van cosinussen. Met $p = x$ en $q = xy$ wordt dit

$$\begin{aligned} I &= \int \sin x \sin(xy) dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(x - xy) - \cos(x + xy)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x - xy)}{1 - y} - \frac{\sin(x + xy)}{1 + y}\right). \end{aligned}$$

Voor $v(y)$ vinden we dan

$$
\begin{aligned}
v(y) &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x-xy)}{1-y}-\frac{\sin(x+xy)}{1+y}\right)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right)}{1-y}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)}{1+y}\right).
\end{aligned}
$$

We maken nu gebruik van de formule voor de complementaire hoek: $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ waaruit ook volgt dat $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(-x)=\cos x$. Dan vinden we

$$
\begin{aligned}
v(y) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{1-y}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{1+y}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{1+y}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+y}{1-y^2}-\frac{1-y}{1-y^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2y}{1-y^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right).
\end{aligned}
$$

(b) De formule voor u is

$$
\begin{aligned}
u(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(xy)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos(xy)dx
\end{aligned}
$$

De functie $\sin x\cos(xy)$ is een oneven functie. De integraal is over een symmetrisch interval rond 0 en dit levert 0. Dus

$$
u(y) = 0 \qquad \text{voor elke } y \in \mathbb{R}.
$$

(c) De inverse Fouriertransformatie zegt hoe we f terugvinden uit u en v. Omdat $u(y)=0$ voor elke $y\in\mathbb{R}$ geldt er

$$
f(x) = \int_0^{\infty} v(y)\sin(xy)dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y}{1-y^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\sin(xy)dy
$$

indien f continu is in x. Als f niet continu is in x moeten we $f(x)$ vervangen door het gemiddelde van de linker- en rechterlimiet.

We gaan $x = \frac{\pi}{2}$ nemen. In dit punt is f niet continu, want het maakt daar een sprong van 1 naar 0. We moeten $f(\frac{\pi}{2})$ dus vervangen door $\frac{1}{2}$ en er geldt dus

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{1-y^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \sin(\frac{\pi}{2} y) dy.$$

Omdat $2\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\sin(\frac{\pi}{2}y) = \sin(\pi y)$ volgt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{1-y^2} \sin(\pi y) dy,$$

zodat

$$\int_0^\infty \frac{y \sin(\pi y)}{1-y^2} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Vraag 6 (voor biochemie & biotechnologie en chemie) Beschouw het gebied D dat in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$D: \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

(a) Beschrijf D in Cartesische xy-coördinaten en schets D.

(b) Neem aan dat D een metalen plaat bevat met massadichtheid

$$\rho(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Bereken de totale massa van D.

Antwoord:

(a) Aangezien $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ is

$$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = r\frac{r\cos\theta}{(r\sin\theta)^2} = r\frac{x}{y^2}.$$

De ongelijkheid $r \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$ komt dus neer op $1 \leq \frac{x}{y^2}$, oftewel

$$y^2 \leq x.$$

Verder betekent $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dat we ons in het eerste kwadrant bevinden en dus $x \geq 0$ en $y \geq 0$. Bijgevolg is D in Cartesische coördinaten gegeven door

$$D: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y^2 \leq x$$

Dit is het gebied onder de grafiek van de functie $y = \sqrt{x}$. Merk op dat D onbegrensd is.

(b) In Cartesische coördinaten gebruiken is de integraal voor de totale massa gelijk aan

$$\int_0^\infty \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} dydx.$$

Hier komen we niet verder mee.

In poolcoördinaten geldt

$$\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{r^2\sin^2\theta}{r^3} = \frac{\sin^2\theta}{r}$$

en de integraal wordt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \frac{\sin^2\theta}{r}\, r\, dr\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \sin^2\theta\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \left(\int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \\
&= [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Vraag 6 (voor geologie) Zij $\vec{F}$ het vectorveld

$$\vec{F} = (z - x^2y, xy^2, z^2x).$$

(a) Bereken de kringintegraal

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

waarin C de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ is. De oriëntatie van C is in tegenwijzerzin.

(b) Bereken de oppervlakteintegraal

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

waarin S het oppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ is. De normaal $\vec{n}$ op S wijst naar boven.

Antwoord:

(a) De integraal is

$$I = \oint_C (z - x^2y)dx + xy^2dy + z^2xdz.$$

Er geldt $z = 0$ op C zodat de gevraagde integraal is

$$I = \oint_C (-x^2y)dx + xy^2dy.$$

De eenvoudigste manier om I uit te rekenen is met de stelling van Green. Als $P = -x^2y$ en $Q = xy^2$ dan is

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2, \qquad -\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2,$$

zodat de stelling van Green zegt dat

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (x^2 + y^2) dA$$

waarin $D : x^2 + y^2 \leq R^2$ de schijf is in het xy-vlak met middelpunt $(0, 0)$ en straal R. We gaan over op poolcoördinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, met $0 \leq r \leq R$ en $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dan

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2\, r\, dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R r^3 dr \right) \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{\pi}{2} R^4. \end{aligned}$$

Een andere manier om I te berekenen is via de parametrisatie van C: $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = 0$ met $0 \le \theta \le 2\pi$. Dan

$$\begin{aligned} -x^2 y dx &= -(R\cos\theta)^2 (R\sin\theta)(-R\sin\theta) d\theta = R^4 \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \\ xy^2 dy &= (R\cos\theta)(R\sin\theta)^2 (R\cos\theta) d\theta = R^4 \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Dit is twee keer hetzelfde. Bijgevolg

$$I = 2R^4 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta.$$

Deze goniometrische integraal kan op een aantal manieren verder uitgerekend worden. Een mogelijke manier is om met $2\cos\theta \sin\theta = \sin(2\theta)$ de integraal te schrijven als

$$I = \frac{1}{2} R^4 \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) \, d\theta.$$

Substitueer hierin $2\theta = x$

$$I = \frac{1}{4} R^4 \int_0^{4\pi} \sin^2 x \, dx.$$

Hierin zien we een integraal van $\sin^2 x$ over twee volle perioden. De integraal is dan 2π, vergelijk bv. met (4.1.10), en dus

$$I = \frac{1}{4} R^4 \, 2\pi = \frac{\pi}{2} R^4.$$

(b) Deze integraal is heel eenvoudig met de stelling van Stokes. De rand van S is de kromme C uit (a) en dus geldt vanwege Stelling 10.4.1 (de stelling van Stokes):

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{t} ds.$$

De kringintegraal is precies de integraal die we in onderdeel (a) al uitgerekend hebben. Dus

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\pi}{2} R^4.$$

Als je de stelling van Stokes niet wilt gebruiken dan is de berekening veel omslachtiger. De rotor van $\vec{F}$ is het vectorveld

$$\mathrm{rot}\vec{F} = (0, 1 - z^2, x^2 + y^2).$$

Omdat S een boloppervlak is, is $\vec{x}$ loodrecht op S en de eenheidsnormaal op S is

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{R}(x, y, z).$$

Het scalair product is

$$\text{rot}\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{1}{R}((1-z^2)y + (x^2+y^2)z) = \frac{1}{R}(y - yz^2 + x^2z + y^2z).$$

We willen dus uitrekenen

$$\frac{1}{R}\iint_S (y - z^2y + x^2z + y^2z)\, dS.$$

We kunnen hiervoor bolcoördinaten gebruiken

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta,$$

met $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ en $0 \le \varphi \le 2\pi$. In Voorbeeld 10.1.2 is berekend dat

$$dS = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Dus

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R}\iint_S (y - z^2y + x^2z + y^2z)\, dS = \\
&\qquad \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\sin\theta\sin\varphi - R^3\sin\theta\sin\varphi\cos^2\theta)\, R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\
&\qquad + \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^3\sin^2\theta\cos^2\varphi\cos\theta + R^3\cos^2\theta\cos^2\varphi\cos\theta)\, R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.
\end{aligned}$$

De eerste dubbele integraal factoriseert als

$$\frac{1}{R}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\right)}_{=0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\sin\theta - R^3\sin\theta\cos^2\theta)\, R^2\sin\theta\, d\theta\right)$$

en dit is nul vanwege de integraal over φ. De tweede dubbele integraal vereenvoudigen we door gebruik te maken van $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ tot

$$\frac{R^5}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = R^4\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\right).$$

Er geldt, zie bv. formule (4.1.9) uit het hoofdstuk over Fourierreeksen,

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \pi \qquad \text{en} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2},$$

zodat de gevraagde integraal gelijk is aan

$$\frac{\pi}{2}R^4.$$