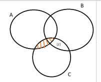
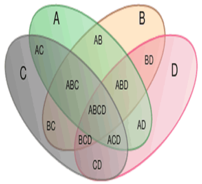
Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

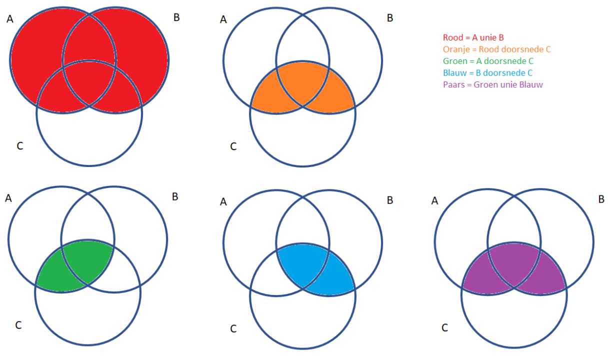
Toestandscode	Betekenis	Hoe ga je te werk?
0	Nog niet opgelost	1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
1	Opgelost - maar sterke twijfels	2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
2	Opgelost - waarschijnlijk juist	3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
3	Opgelost - juist	4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)
4	Opgelost én nagekeken door een assistent	
5	Ter controle gestuurd naar een assistent	

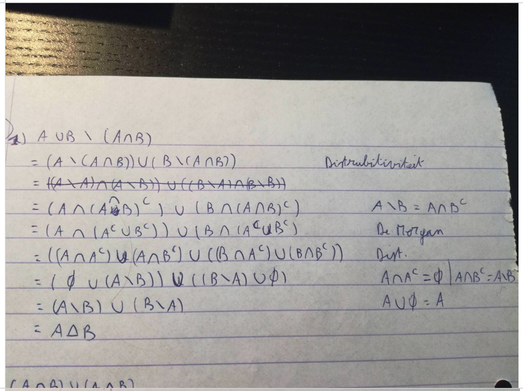
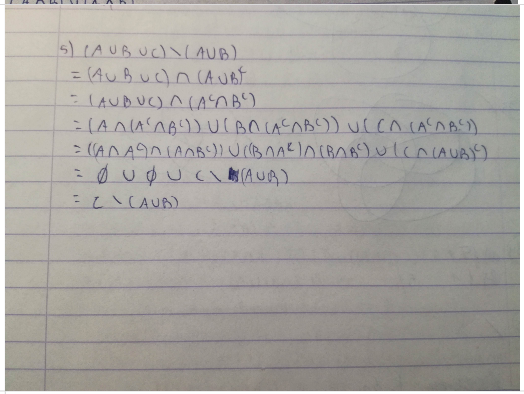
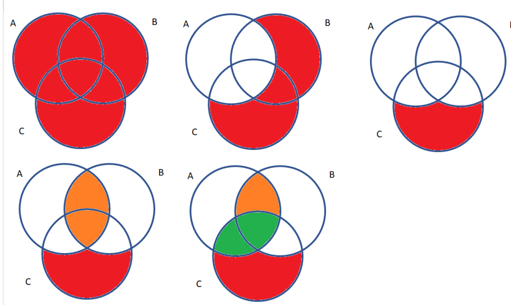
Hoofdstuk 1

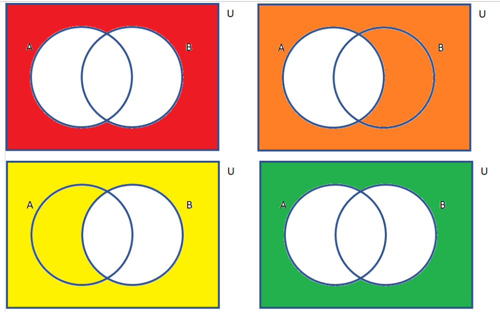
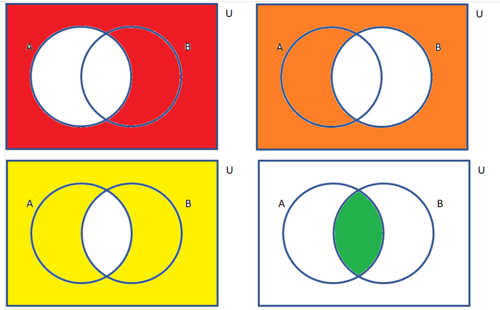
Nummer	Opgave	Toestand	Oplossing	Opmerkingen	Uitleg oplossing
1	Definieer de volgende verzamelingen door opsomming. • De verzameling van alle dagen van de week. • De verzameling van landen in de Benelux. Definieer de volgende verzamelingen door omschrijving. Geef zowel een omschrijving in natuurlijke taal als een in de accolade-vorm. • { 1, 2, 3, 4, 5 } • { groen, oranje, rood }	3	a) {maandag, dinsdag, woensdag, donderdag, vrijdag, zaterdag, zondag} b) {België, Nederland, Luxemburg} c) De verzameling van de natuurlijke getallen van 1 t.e.m. 5. {x | 1 ≤ x ≤ 5} of {x | x is een natuurlijk getal tussen 1 en 5 (inclusief)} d) De verzameling van de kleuren van een verkeerslicht. {x | x is één van de kleuren van een verkeerslicht}		
2	Welke van de volgende beweringen zijn waar? • maandag ∈ DagenVanDeWeek • 2017 ∈ Schrikkeljaren • januari ∈ DagenVanDeWeek • februari ∉ DagenVanDeWeek	3	a) Waar b) Niet waar c) Niet waar d) Waar		
3	Druk met de pas geziene notatie uit dat 1 geen element van de lege verzameling is.	3	1 ∉ ∅		
4	Wat betekent elk van de volgende beweringen? Is de bewering waar of onwaar? ∅ ⊂ ∅ ∅ ⊆ ∅ voor alle singletons A geldt dat ∅ ⊆ A voor alle singletons A geldt dat ∅ ⊂ A	3	a) Onwaar b) Waar c) Waar d) Onwaar	b) de lege verzameling is aan zichzelf gelijk. Het kan dus niet een strikte deelverzameling van zichzelf zijn a) moet dan toch onwaar zijn?	Ja, Voor elke verzameling A geldt dat ∅ een deelverzameling is van A. DUS is ∅ een deelverz van ∅ maar geen strikte deelverz. want ∅ = ∅
5	Is het mogelijk dat A \not\subset B en A ⊆ B?	3	Ja, als A en B gelijk zijn.	Stel A=B, dan is A geen stricte deelverzameling van B, maar wel een (niet-stricte) deelverzameling, dus zijn ze beide waar. Antwoord is dus 'JA'.	
6	Toon aan, door erover te redeneren, dat voor alle verzamelingen A en B het volgende geldt: als A ⊆ B en B ⊆ A, dan is A = B.	3	Bewijs pagina 61. Om te bewijzen dat A = B, moeten we tonen dat beide verzamelingen precies dezelfde elementen bevatten. Welnu, stel dat dat niet zo zou zijn. Dan moet er een x bestaan die wel in de ene maar niet in de andere verzameling zit. Stel bv. dat x 2 A maar x 62 B. Dit kan niet, wegens A ↕ B. Analoog kan ook x 2 B en x 62 A niet, wegens B ↕ A. Met andere woorden, er bestaat geen x die wel in de ene maar niet in de andere verzameling zit. De enige mogelijke conclusie is dan dat A en B precies dezelfde elementen bevatten, m.a.w., A = B.	Correcte symbolische notatie (open dit in word en zet het om naar een formule? \left(\left(\forall x\in A\Rightarrow x\in B\right)\land\left(\forally\in B\Rightarrow y\in A\right)\right)\Rightarrow A=B	
7	Beschrijf in woorden wat A ∩ B is, als A en B respectievelijk de verzamelingen zijn van: • alle zoogdieren; alle dieren die kunnen vliegen; • alle voertuigen die kunnen rijden; alle voertuigen die kunnen varen • alle priemgetallen; alle even getallen • alle rijen getallen die van klein naar groot gerangschikt zijn; alle rijen getallen die van groot naar klein gerangschikt zijn	3	a) Alle vliegende zoogdieren -> (bv. vleermuis) b) Alle voertuigen die kunnen rijden en vliegen-> (bv. amfibievoertuigen) c) Alle priemgetallen die even zijn -> (enkel het getal 2) d) Alle rijen getallen die zowel van klein naar groot als van groot naar klein gerangschikt zijn (bv. constante rijen en rijen met 1 element)	Kunnen vliegen =/= vliegen ;) | varen*	
8	Is de volgende bewering juist? "Als x ∈ A ∩ B, geldt zowel x ∈ A als x ∈ B." Beargumenteer je antwoord.	3	Ja, volgt rechtstreeks uit de definitie van de doorsnede.		
9	Is A ∩ B = B ∩ A? Beargumenteer je antwoord.	3	Bij A ∩ B spreken we over de elementen die A en B gemeenschappelijk hebben. Bij B ∩ A over de elementen die B en A gemeenschappelijk hebben. We spreken dus in beide gevallen over dezelfde verzameling en kunnen concluderen dat de doorsnede symmetrisch, commutatief... is en de gelijkheid dus klopt.		
10	Toon aan, door erover te redeneren, dat voor elke verzameling A, • A ∩ A = A • A ∩ ∅ = ∅	3	a) Alle elementen van A en A, dus alle elementen van A b) Alle elementen van A en alle elementen van niets, dus de lege verzameling		
11	Waaraan is] − ∞, a] ∩ [a, +∞[gelijk?	3	a		

12	Beschrijf in woorden wat $A \cup B$ is, als A en B respectievelijk de verzamelingen zijn van: • alle zoogdieren; alle dieren die kunnen vliegen; • alle voertuigen die kunnen rijden; alle voertuigen die kunnen varen • alle priemgetallen; alle even getallen • alle rijen getallen die van klein naar groot gesorteerd zijn; alle rijen getallen die van groot naar klein gesorteerd zijn	3	a) Alle vliegende dieren en ook alle zoogdieren b) Alle voertuigen die kunnen rijden of varen c) Alle priemgetallen en even getallen d) Alle rijen getallen die of van groot naar klein of van klein naar groot gesorteerd zijn	Kunnen vliegen =/= vliegen ;)	
13	Is $A \cup B = B \cup A$? Beargumenteer je antwoord.	3	Bij $A \cup B$ spreken we over de elementen die in A of B of beide zitten. Bij $B \cup A$ over de elementen die in B of A of beide zitten. We spreken dus in beide gevallen over dezelfde verzameling en kunnen concluderen dat de unie symmetrisch, commutatief... is en de gelijkheid dus klopt.		
14	Is de volgende bewering juist? "Als $x \in A \cup B$, geldt zowel $x \in A$ als $x \in B$." Beargumenteer je antwoord.	3	Nee, x element van A en/of B; niet perse beiden.		
15	Toon aan, door erover te redeneren, dat voor elke verzameling A, $A \cup A = A$ $A \cup \varnothing = A$	3	a) Alle elementen van A en A, dus A b) Alle elementen van A en niets, dus A		
16	Beschrijf in woorden wat $A \setminus B$ is, als A en B respectievelijk de verzamelingen zijn van: • alle letters; alle klinkers • alle voertuigen die kunnen rijden; alle voertuigen die kunnen varen • alle studenten aan de KU Leuven; alle studenten die dit vak volgen • alle rijen getallen die van klein naar groot gesorteerd zijn; alle rijen getallen die van groot naar klein gesorteerd zijn	3	a) Alle medeklinkers b) Alle voertuigen die niet kunnen varen, maar wel rijden c) Alle studenten aan de KUL die dit vak niet volgen d) Alle rijen die van klein naar groot gesorteerd zijn, maar niet van groot naar klein		
17	Is $A \setminus B = B \setminus A$? Beargumenteer je antwoord.	3	Bij $A \setminus B$ spreken we over de elementen die in A, maar niet in B zitten. Bij $B \setminus A$ spreken we over de elementen die in B zitten, maar niet in A. Enkel wanneer beide verzamelingen leeg zouden zijn, zouden ze gelijk zijn. Anders spreken we over verschillende verzamelingen. De gelijkheid klopt dus enkel in het geval dat $A = B = \varnothing$.		
18	Schrijf in woorden op wat het verband is tussen $x \in A \setminus B$ enerzijds, en $x \in A$ en $x \in B$ anderzijds.	3	$x \in A \setminus B = x \in A$ en x \∈ B		
19	Aan welke verzameling is $A \setminus A$ steeds gelijk, wat A ook is?	3	$\varnothing$		
20	Aan welke verzameling is $A \setminus \varnothing$ steeds gelijk, wat A ook is?	3	A		
21	Klopt de volgende bewering? "Als $A \setminus B = C$, dan is $A \setminus C = B$".	3	Nee, $A \setminus C = A \cap B$		
22	Als $A \subseteq B$, waaraan zijn de volgende verzamelingen dan gelijk? • $A \setminus B$ • $A \cap B$ • $A \cup B$	3	a) $\varnothing$ b) A c) B	Ik ben niet 100% zeker of a klopt, het is de lege verzameling als A = B, maar B kan ook een strikte deelverz vn A zijn, en dan is het niet leeg -> Uw redenering klopt niet, als $A \subseteq B$, zit elk element van A ook in B. Dus $A \setminus B$ = de elementen die in A zitten maar niet in B. Aangezien alle elementen van A ook in B zitten, is dit altijd de lege verzameling.	
23	Beschrijf in woorden wat $A \Delta B$ is, als A en B respectievelijk de verzamelingen zijn van: • alle medeklinkers; alle klinkers • alle letters; alle klinkers • alle voertuigen die kunnen rijden; alle voertuigen die kunnen varen • alle studenten aan de KU Leuven; alle studenten die dit vak volgen	3	a) Alle letters b) Alle medeklinkers c) Alle voertuigen die rijden of varen, maar niet beide d) Alle studenten aan de KUL die dit vak niet volgen		
24	Is $A \triangle B = B \triangle A$?	3	Bij $A \triangle B$ spreken we over de elementen die in A of B, maar niet in beide zitten. Bij $B \triangle A$ spreken we over de elementen die B of A, maar niet in beide zitten. In beide gevallen spreken we over dezelfde verzameling en kunnen we dus stellen dat de gelijkheid altijd klopt.		
25	Welke van de volgende beweringen zijn equivalent (d.w.z. betekenen hetzelfde)? $x \in A$, $x \notin A$, $x \in A^c$, $x \notin A^c$.	3	$x \in A \equiv x \notin A^c$ $x \notin A \equiv x \in A^c$		
26	Toon aan dat voor alle verzamelingen A, $A \cap A^c = \varnothing$. Doe dit door te redeneren over welke elementen wel en niet in de genoemde verzamelingen zitten.	3	De definitie van het complement van een verzameling A stelt dat het alle individuen zijn die niet in deze verzameling zitten, dus wanneer we een willekeurig element nemen en het zit in A, kan het per definitie niet in A-complement zitten. De doorsnede van A met zijn complement is dus leeg en is dus de lege verzameling.		
27	Toon aan dat $A \setminus B = A \cap B^c$. Doe dit door te redeneren over welke elementen wel en niet in de genoemde verzamelingen zitten.	3	B^c zijn alle elementen van het universum die niet in B zitten. Hierin zitten ook de elementen van A die niet in B zitten. Dus de doorsnede van A met het complement van B is de verzameling van alle getallen die wel in A, maar niet in B zitten, wat overeenkomt met $A \setminus B$.		
28	Toon aan, door erover te redeneren, dat voor elke verzameling A geldt: • $A \cup A^c = U$ • $A \cap A^c = \varnothing$	3	a) Alle elementen van A samen met alle elementen niet in A, wat alle mogelijke elementen samen zijn, genaamd het universum U. b) De doorsnede staat voor de elementen die zowel in A als in zijn complement zitten, wat per definitie onmogelijk is. De doorsnede is dus leeg.		
29	Wat is het complement van $]-\infty, a[$?	3	$[a, +\infty[$		

30	Toon op een schematisch Venn-diagram welk gebied overeenkomt met A∆B.	3			https://prnt.sc/htyjm8
31	Identificeer 8 verschillende gebieden op Figuur 1.6, nummer ze 1 tot 8. Geef voor elk gebied aan of de elementen in dat gebied wel/niet in A, B, en C zitten.	2		a,b,c toevoegen	https://prnt.sc/htymso
32	Zij A de verzameling van alle gehele getallen groter dan of gelijk aan 10, B de verzameling van alle even getallen, en C de verzameling van alle priemgetallen. Toon A, B en C in een Venn-diagram. Arceer de gebieden die geen elementen bevatten.	2		Er zijn wel priemgetallen die groter dan (OF gelijk aan)10 zijn, ook is er een priemgetal dat even is (2). Er is alleen geen priemgetal dat even én groter dan of gelijk is aan 10.	
33	(optioneel) Teken een Venn-diagram voor 4 verzamelingen A, B, C, en D, op zo'n manier dat elk individu op de juiste plaats getekend kan worden, wat ook de verzamelingen zijn waar het wel/niet toe behoort. Tel het aantal verschillende gebieden in je tekening. Is het zo dat voor elk individu precies 1 aaneengesloten gebied bestaat waar het thuishoort?	3	 Aaneengesloten gebieden? Ja Aantal gebieden: 15		
34	Zij A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {3, 4, 5}, C = {5}. Bereken (A ∪ B) ∩ C en A ∪ (B ∩ C).	3	(A ∪ B) ∩ C = {5} en A ∪ (B ∩ C) = {1, 2, 3, 4, 5}		
35	(optioneel) Onder welke omstandigheden zou een functie miljarden keren sneller uitgerekend kunnen worden als een uitdrukking vereenvoudigd wordt, zelfs als die uitdrukking zelf niet heel ingewikkeld is? (Hint: denk aan recursieve functiedefinities.)	0			
36	Toon aan dat ook het volgende geldt: als A ⊆ B^c, is B ⊆ A^c.	2	Neem een willekeurige x \in A. Omdat A \subset B^c, geldt ook dat x \in B^c en per definitie van complement x \not\in B. Voor ieder element van A geldt dus dat het geen element is van B, m.a.w. dat de doorsnede van A en B de lege verzameling is. We zijn bekomen dat voor een willeukeurige x \in A geldt dat x \not\in B, ofdat B enkel elementen bevat die geen element zijn van A. M.a.w., B is een deelverzameling van alle elementen die niet in A zitten -> b \subset A^c.		
37	Aan welke verzamelingen zijn de volgende uitdrukkingen gelijk? Geef een overtuigend argument voor je antwoord. Zie cursustekst voor precieze opgave.	3	a) ∅ b) 0 c)] - ∞, a]		
38	Voor welke verzamelingen A en B geldt wel dat A\B = B \A?	3	(Voor het geval dat A en B beide leeg zijn, of) A = B.	Als A en B leeg zijn dan is A = B dus vrij nutteloos om dat apart te zeggen	
39	Zij A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {3, 4, 5}, C = {5}. Bereken (A \ B) \ C en A \ (B \ C).	3	(A \ B) \ C = {1, 2} A \ (B \ C)= {1,2,5}		
40	Zij A de verzameling van alle blauwe dingen; B de verzameling van alle fietsen en C de verzameling van alle auto's. Beschrijf in woorden het verschil tussen A ∩ (B ∪ C) en (A ∩ B) ∪ C.	3	A ∩ (B ∪ C) = Alle blauwe dingen dat geen fietsen of auto's zijn. (A ∩ B) ∪ C = alle auto's en alle blauwe fietsen	A ∩ (B ∪ C) = Alle blauwe fietsen en auto's	
41	Zij A de verzameling van alle auto's, B van alle fietsen, C van alle blauwe dingen. Interpreteer de bovenstaande gelijkheid in deze context.	3	De verzameling van alle blauwe auto's en fietsen is de unie van alle blauwe fietsen en alle blauwe auto's		

42	Toon met een Venn-diagram aan dat de bovenstaande gelijkheid in het algemeen geldt.	3			
43	Schrijf op welke formules aan elkaar gelijk moeten zijn volgens de tweede distributiviteitseigenschap. Toon met een Venn-diagram aan dat die gelijkheid in het algemeen geldt.	3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		
44	Distributiviteit vinden we ook in de rekenregels voor optelling en vermenigvuldiging terug. Welke van de volgende uitspraken zijn juist? • + is distributief over × • × is distributief over + • − is distributief over × • × is distributief over −	3	B en D		
45	Vereenvoudig de volgende formules. 1. $(A \cup B) \cap Ac$ 2. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	3	1. $B \setminus A$ 2. $A \cup (B \cap C)$	2. distributiviteit	
46	Is \ distributief over ∪? Denk na over de volgende uitdrukkingen: $A \setminus (B \cup C)$ $(A \cup B) \setminus C$	3	\ is enkel rechts distributief: $A \setminus (B \cup C) != (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$		
47	Toon via een Venn-diagram aan dat \ rechts-distributief is over ∩.	0			
48	Toon via Venn-diagrammen aan dat de beide gelijkheden steeds gelden.	0			
49	Toon met een redenering in woorden, en gebruik makend van $x \in A$, $x \in B$, etc., aan dat de beide gelijkheden steeds gelden.	0			
50	Definieer de verzameling V door opsomming. Hoeveel elementen bevat V ?	3	2^5 = 32 elementen V = {{}, {a}, {e}, {i}, {o}, {u}, {a,e}, {a, i}, ...}	ik heb ze allemaal opgeschreven, en ik kwam op 31 uit , en dan me binomiaalcoefficienten ook uitgerekend en ook 31 uitgekome, enkel als ge lege verzameling ook meetelt hebt ge 32 dus kweeni of die er ook bijhoort (gilles de leus) De lege verzameling is een element van elke verzameling dus ja hij hoort erbij	
51	Welke van de volgende beweringen zijn waar? 1. $\{a, e, i\} \in V$ 2. $\{a, e, i\} \subseteq V$ 3. $\{a, e\} \in K$ 4. $\{a, e\} \subseteq K$	2	1) Waar 2) Onwaar 3) Onwaar 4) Waar		
52	Beargumenteer dat de volgende eigenschap steeds moet gelden: voor elke verzameling X waarvoor $X \subset K$, geldt ook: $X \in V$. Om dat in te zien: formuleer in woorden wat $X \subset K$ precies betekent; doe hetzelfde met $X \in V$; leg dan uit waarom het eerste het tweede impliceert. Impliceert het tweede ook het eerste?	3	Als $X \subset K$, dan is X de lege verzameling of de verzameling van enkele klinkers, maar niet van ze allemaal. Als $X \in V$, dan is X de lege verzameling of de verzameling van enkele klinkers. $X \subset K \Rightarrow X \in V$ omdat de premisse een strengere voorwaarde is dan de conclusie Omgekeerd gaat het dus niet		
53	Hoeveel elementen bevat {{1, 2, 3}, {4, 5}} ?	3	2 elementen; het is een verzameling van verzamelingen		
54	Schrijf het verband op tussen de verzamelingen V en K van het vorige voorbeeld.	3	V = P(K)		
55	Toon aan, door erover te redeneren of via een Venn-diagram, dat de bewering $A \cup B = B$ equivalent is met de bewering $A \cap B = A$ (d.w.z., als het ene waar is, is het andere ook waar, en vice versa).	3	A U B = B kan enkel waar zijn a.s.a A \subset B. In dat geval hebben A en B enkel en alleen alle elementen van A gemeenschappelijk, d.w.z. dat $A \cap B = A$ Omgekeerd geldt dat $A \cap B = A$ enkel waar kan zijn als A \subset B. Aangezien alle elementen van A ook al een element zijn van B, zal A U B = B gelden.		

56	Welke van de volgende eigenschappen gelden steeds, voor elk paar verzamelingen A en B? Voor de eigenschappen die steeds gelden: leg uit waarom (met behulp van een Venn-diagram, of in woorden). Voor degene die niet steeds gelden: toon een geval waar de eigenschap niet geldt. 1. (A ∩ B) ∪ (A \ B) = A 2. A \ (A ∩ B) = A \ B 3. A \ (A \ B) = A ∩ B 4. (A ∪ B) \ A = B 5. (A ∪ B) \ A = B \ A	3	1) juist 2) juist, dit geldt ook indien alle elementen van A in B zitten want dan is A ∩ B = A en A/A = 0(lege verzameling) en A \ B is dan ook leeg 3) Juist 4) Fout, in het geval dat alle elementen van B in A zitten geldt er A U B = A en A/A = 0 dus niet gelijk aan B. met venndiagram zie je ook dat het niet klopt voor de situatie da ze gwn deels overlappen want dan is het B\A 5) Juist		
57	Vereenvoudig de volgende formules. Probeer dit op twee manieren te doen: door de rekenregels te gebruiken die we gezien hebben, en door via een Venndiagram te redeneren. Op die manier kan je nagaan dat je oplossingen kloppen. 1. A ∪ B \ (A ∩ B) 2. (A ∩ B) ∪ (A∆B) 3. A ∪ B ∪ A 4. A ∪ B ∩ A 5. (A ∪ B ∪ C) \ (A ∪ B) 6. (A ∪ B ∪ C) \ A \ B ∪ (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) 7. (A ∪ B)c ∩ Ac ∩ Bc 8. (Ac ∪ Bc)c	3	1) A (symmetrisch verschil) B 2) A U B 3) A U B 4) A 5) C\(AUB) 6) C \ B ∪ (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) 7) (A ∪ B)^c 8) A ∩ B	5) In alle gevallen is C\(AUB) volgens mij C indien je over maar 3 verz spreekt => Heb het uitgewerkt, je bekomt wel degelijk C\(AUB)	
					
					

Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

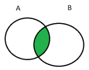
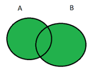
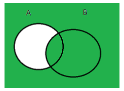
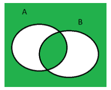
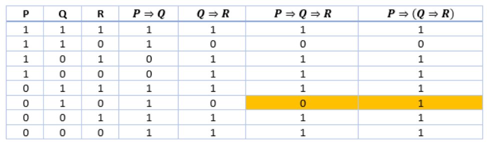
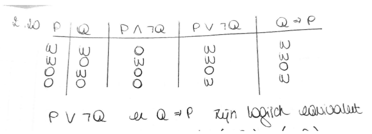
Toestandscode	Betekenis		Hoe ga je te werk?
0	Nog niet opgelost		1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
1	Opgelost - maar sterke twijfels		2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
2	Opgelost - waarschijnlijk juist		3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
3	Opgelost - juist		4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)
4	Opgelost én nagekeken door een assistent		
5	Ter controle gestuurd naar een assistent		

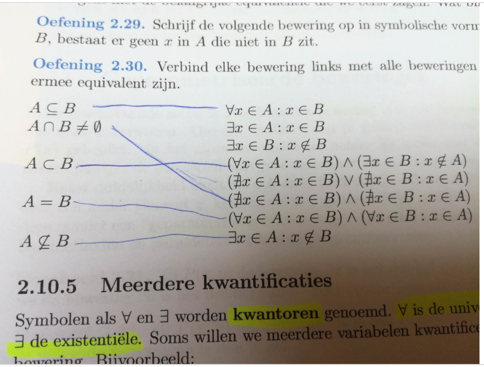
Hoofdstuk 2

<table>
<tr><th>Nummer</th><th>Opgave</th><th>Toestand</th><th>Oplossing</th><th>Opmerkingen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Beschouw de volgende zinnen:
(1) Alle studenten zijn geslaagd voor dit vak.
(2) Niet alle studenten zijn geslaagd voor dit vak.
(3) Alle studenten zijn niet geslaagd voor dit vak.
(4) Niemand is geslaagd voor dit vak.

Welke van deze zinnen zeggen precies hetzelfde, welke zeggen precies het tegenovergestelde,
en welke vind je dubbelzinnig? En nu we er toch over bezig zijn:
wat bekent “precies het tegenovergestelde” eigenlijk?</td><td>2</td><td>a) Hetzelfde: 3 & 4
- Al wordt er in 4 niet gespecifieerd of het gaat om studenten, dus eigenlijk zijn ze niet helemaal gelijk
b) Tegengesteld: 1 & 3
c) Dubbelzinnig: 2
- Niet alle (minstens 1 iemand niet of niemand? --> zie voorbeeld 2.7)
d) Precies het tegenovergestelde: 1 & 3
- 1 & 4: omdat niemand niet per se alleen studenten zijn.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Beschouw de volgende zinnen:
(1) Dit programma wordt ondertiteld voor doven en slechthorenden.
(2) Dit programma wordt ondertiteld voor wie doof en slechthorend is.
(3) Dit programma wordt ondertiteld voor wie doof of slechthorend is.
Welk van de zinnen 2 en 3 is equivalent met zin 1? Hoe verklaar je dat in de ene zin “en” gebruikt wordt en in de andere zin “of”?</td><td>3</td><td>3 is equivalent, het wordt niet enkel voor de doorsnede van doven en slechthorenden ondertiteld, maar voor de unie. Men kan daarnaast ook moeilijk doof en slechthorend tegelijk zijn. "en" staat voor de doorsnede, wie beide aandoeningen heeft; "of" staat voor de unie, wie minstens één van beide aandoeningen heeft.</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Welke wiskundige bewering drukt welke interpretatie uit, in het bovenstaande voorbeeld?</td><td>3</td><td>$G \subset S$
staat voor de interpretatie "het is niet zo dat alle studenten geslaagd zijn"

$G = \varnothing$
staat voor de interpretatie "geen enkele student is geslaagd"</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Geef aan welke van de volgende uitspraken, in de context van de verzamelingenleer, beweringen zijn, en welke niet. Je mag ervan uitgaan dat A en B verzamelingen zijn.
• A
• $A \subseteq B$
• $x \in B$
• als $x \in A$ en $A \subseteq B$, dan geldt $x \in B$
• $A \cup B$
• $A \cup B \subseteq B$</td><td>2</td><td>a) Geen bewering
b) Bewering
c) Bewering
d) Bewering
e) Geen bewering
f) Bewering</td><td>is d niet "Geen bewering"? aangezien je niet kan zeggen of de bewering waar of onwaar is, het is gewoon een feit
Ik kan zeggen dat als $x \in A$ en $A = B$, dan geldt $x \notin B$ (wat natuurlijk niet klopt). => "dat is niet waar"
Als je kan antwoorden "dat is waar", of "dat is niet waar" is het een bewering</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Geef voor elke “of” aan of het een inclusieve of exclusieve “of” is.
• Wie student is, of ouder dan 65, mag gratis binnen.
• Om te mogen stemmen, moet je de Belgische nationaliteit hebben of in België wonen.
• We kunnen naar zee gaan, of naar de dierentuin, maar er is geen tijd om beide te doen.
• Je moet kiezen: je mag nu een ijsje, of straks een wafel.</td><td>3</td><td>a) inclusief
b) inclusief
c) exclusief
d) exclusief</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Construeer de waarheidstabel voor de exclusieve of.</td><td>3</td><td>P | Q | P⊕Q
----
waar waar onwaar
waar onwaar waar
onwaar waar waar
onwaar onwaar onwaar</td><td>Als iemand een mooiere tabel kan maken, go ahead :)</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Verbind elke bewering links met de bewering rechts die er de ontkenning van is.
$x \in A$ $x \notin A$
$x \notin A$ $x \in A$
$\neg(x \notin A)$ $B \subseteq A$
$A \subseteq B$ $A \not\subseteq B$
$B \not\subseteq A$</td><td>3</td><td>Verbind elke bewering links met de bewering rechts die er de ontkenning van is.
$x \in A$ ----------------- $x \notin A$
$x \notin A$ ----------------- $x \in A$
$\neg(x \notin A)$ ------------ $x \notin A$
$A \subseteq B$ -------------- $A \not\subseteq B$</td><td>Als iemand mooiere lijntjes kan maken, go ahead!</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>8</td><td>We spreken af dat R staat voor de bewering “het regent”, P voor “ik heb een paraplu”, en N voor “ik word nat”. Schrijf nu de bewering “Als het regent en ik heb geen paraplu, dan word ik nat” op in termen van R, P, N, en de formele notatie die we tot nog toe gezien hebben.</td><td>3</td><td>R ∧ ¬P ⇒ N</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Duid in de waarheidstabel de lijnen aan die overeenkomen met Q onwaar en P ⇒ Q waar.</td><td>3</td><td>P Q P ⇒ Q
waar waar waar
waar onwaar onwaar
onwaar waar waar
onwaar----onwaar-----waar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Stel dat P ⇒ Q waar is, en P is onwaar: wat kunnen we dan besluiten over Q? Gebruik opnieuw de waarheidstabel.</td><td>3</td><td>Er kan niets besloten worden over Q.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>Vergewis je ervan dat, als P onwaar is, P ⇒ Q niet anders dan waar kan zijn, volgens de waarheidstabel.</td><td>3</td><td>"Vergewis je ervan."</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>Als Q onwaar is, wat weten we dan over P ⇒ Q?</td><td>3</td><td>Er kan niets besloten worden over P ⇒ Q.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>Als Q waar is, wat weten we dan over P ⇒ Q?</td><td>3</td><td>P ⇒ Q is in dat geval altijd waar.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Duid op een Venn-diagram van A en B aan welk gebied overeen komt met de volgende verzamelingen.
• {x | x ∈ A ∧ x ∈ B}
• {x | x ∈ A ∨ x ∈ B}
• {x | x ∈ A ⇒ x ∈ B}</td><td>3</td><td>  </td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>Een postbedrijf gebruikt twee tarieven voor het frankeren van enveloppen. Het bedrijf onderscheidt drukwerk en brieven. Drukwerk zit in een open envelop, en mag gefrankeerd worden met een postzegel van 50 cent. Brieven zitten in een gesloten envelop, en moeten gefrankeerd worden aan 70 cent. Het is niet verboden om een duurdere postzegel op een envelop te kleven dan nodig. Beschouw de volgende beweringen: “de envelop is open”, “de envelop is gesloten”, “de envelop is gefrankeerd met 50 cent”, “de envelop is gefrankeerd met 70 cent”. Schrijft de regel die het postbedrijf hanteert op als een implicatie. De implicatie moet zo zijn dat elke envelop die voldoet aan de regel, “waar” oplevert als waarheidswaarde voor de implicatie, en elke envelop die niet voldoet, “onwaar”.</td><td>3</td><td>G ⇒ Z; met G = "de envelop is gesloten" en Z = "de envelop is gefrankeerd met 70 cent".
Aangezien een duurdere postzegel op een open envelop ook geldig is, kan je zien wanneer je een waarheidstabel opsteld deze stelling enkel fout is wanneer een grote envelop niet met 70 cent wordt gefrankeerd.
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>Op tafel liggen een aantal briefjes papier. Op elk briefje staat aan de ene kant een letter, en aan de andere kant een cijfer. Sommige briefjes liggen met de letter naar boven, andere met het cijfer. De persoon die de briefjes gemaakt heeft, mocht willekeurig letters en cijfers kiezen, maar moest de volgende regel volgen: als de letter een klinker is, moet het cijfer op de andere kant even zijn. Op tafel liggen nu de volgende briefjes: A B 5 X 6 E F 2. Jouw taak is om te controleren of de regel correct toegepast is, en daarbij moet je zo weinig mogelijk briefjes omdraaien. Hoeveel briefjes moet je dan omdraaien?</td><td>3</td><td>"Als de letter een klinker is, moet het cijfer op de andere kant even zijn" is een implicatie. Deze kan enkel incorrect zijn wanneer het antecedent waar is, maar het consequent onwaar. Dus enkel wanneer de letter een klinker is, moet het kaartje gecontroleerd worden. Dit is dus in het geval van 'A' en 'E'. Ook 5 moet gecontroleerd worden, om zeker te zijn dat er geen klinker achter zit. Het antwoord is dus 3.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td>Duid op een Venn-diagram van A en B aan welk gebied overeen komt met de volgende verzameling:
{x | x ∈ A ⇔ x ∈ B}</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td>Wat betekent B ∧ K ∨ H, in het voorbeeld van het broodje met kaas of hesp?</td><td>3</td><td>Ofwel <een broodje en kaas> ofwel <enkel hesp>.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td>Toon het verschil aan tussen P ⇒ Q ⇒ R en P ⇒ (Q ⇒ R) door beide beweringen te interpreteren voor P = “A ⊆ B”; Q = “C ⊆ A”; en R = “C ⊆ B”.</td><td>0</td><td></td><td>Ik heb volgende tabel staan als "oplossing", maar ik kan de link niet echt leggen met de vraag...</td><td>
<table>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>R</th><th>$P \Rightarrow Q$</th><th>$Q \Rightarrow R$</th><th>$P \Rightarrow Q \Rightarrow R$</th><th>$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>20</td><td>Stel een waarheidstabel op voor de volgende beweringen:
P ∧ ¬Q
P ∨ ¬Q
Q ⇒ P
Welke zijn logisch equivalent?</td><td>3</td><td>Bewering 2 en 3 zijn logisch equivalent.

2.20
<table>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>P ∧ ¬Q</th><th>P ∨ ¬Q</th><th>Q ⇒ P</th></tr>
<tr><td>W</td><td>W</td><td>O</td><td>W</td><td>W</td></tr>
<tr><td>W</td><td>O</td><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr>
<tr><td>O</td><td>W</td><td>O</td><td>O</td><td>O</td></tr>
<tr><td>O</td><td>O</td><td>O</td><td>W</td><td>W</td></tr>
</table>
P ∨ ¬Q en Q ⇒ P zijn logisch equivalent</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>21</td><td>Toon aan dat dat de bewering P ⇒ Q logisch equivalent is met (¬Q) ⇒ (¬P).</td><td>3</td><td>P | Q | P⇒Q | ¬P | ¬Q | ¬Q⇒¬P
-- | ---
waar waar waar | onwaar onwaar waar
waar onwaar onwaar | onwaar waar onwaar
onwaar waar waar | waar onwaar waar
onwaar onwaar waar | waar waar waar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>22</td><td>Welke van de volgende beweringen zijn logisch equivalent met P ⇔ Q?
• (P ⇒ Q) ⋁ (Q ⇒ P)
• (P ⇒ Q) ⋀ (Q ⇒ P)
• P ⇒ Q ⋁ Q ⇒ P
• P ⋀ Q ⋁ ¬(P ⋁ Q)
• ¬(P ⋀ ¬Q ⋁ Q ⋀ ¬P)</td><td>3</td><td>2 en 4
1) niet juist: door de 'of'
2) juist: zie tabel met rekenregels
3) niet juist: volgens de volgorde van tekens, een implicatie heeft voorrang op een en, dus komt dit overeen met 1
4) juist: met toepassing rekenregels gelijk aan (P ⋀ Q) ⋁ (¬P ⋀ ¬Q), wat de definitie is van P ⇔ Q.
5) niet juist: zal altijd waar geven en is dus niet logisch equivalent met P ⇔ Q.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>23</td><td>Toon aan dat P ⇒ Q logisch equivalent is met ¬P ⋁ Q.</td><td>3</td><td>P | Q | P⇒Q | ¬P ⋁ Q
-- | --------------------
waar waar waar | waar
waar onwaar onwaar | onwaar
onwaar waar waar | waar
onwaar onwaar waar | waar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>24</td><td>Geef aan welk van de volgende formules een tautologie is, een contradictie, of geen van beide.
• P ⋁ ¬P
• P ⋀ ¬P
• P ⋁ Q
• (P ⇒ Q) ⋁ (Q ⇒ P)
• (P ⇒ Q) ⋁ P
• (P ⇒ Q) ⋁ Q
• (P ⇒ Q) ⋀ P ⋀ ¬Q</td><td>3</td><td>1. tautologie
2. contradictie
3. GVB
4. tautologie
5. tautologie
6. GVB
7. contradictie</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>25</td><td>Welk van de volgende beweringen zijn altijd waar, soms waar (afhankelijk van A en B), of nooit waar:
• ∀x ∈ A ∩ B : x ∈ A
• ∀x ∈ A ∪ B : x ∈ A</td><td>3</td><td>1. altijd waar (x ∈ B zou ook waar zijn)
2. soms waar (indien x ∈ A én x ∈ B)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>26</td><td>De volgende beweringen zijn niet altijd waar, maar wel onder bepaalde voorwaarden. Wat zijn die voorwaarden? Schrijf ze op in termen van operaties op verzamelingen (dus zonder te verwijzen naar elementen ervan).
• ∃x ∈ A ∩ B : x ∈ A
• ∃x ∈ A ∪ B : x ∈ A
• ∃x ∈ A : x ∉ B</td><td>2</td><td>1. A /= ∅ and B /= ∅
2. A \ B /= ∅
3. A /⊆ B</td><td>3) is dit niet correct? A ∩ B /=∅
Als A een deelverzameling is van B (ligt 'in' B in venn diagram),
Dan is de doorsnede A /= ∅ en toch geldt het gegeven niet</td><td></td></tr>
<tr><td>27</td><td>Als ¬∃x : P en ∀x : ¬P logisch equivalent zijn, dan zijn hun ontkenningen ook logisch equivalent met elkaar, dus: ∃x : P is logisch equivalent met ¬(∀x : ¬P). Interpreteer dit in woorden.</td><td>3</td><td>"Er bestaat een x waarvoor P geldt" is het zelfde als "Het is niet zo dat voor alle x P niet geldt" of met andere woorden: er moet wel een P bestaan waarvoor x geldt (anders geldt voor alle x dat P niet geldt)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>28</td><td>In oefening 2.27 bleek: ∃x : P is equivalent met ¬(∀x : ¬P). Dit geldt altijd, voor eender welke bewering P. Het geldt dus ook als die bewering zelf de ontkenning van een andere bewering is. Stel P = ¬Q. Vul dit in in bovenstaande formules. Vereenvoudig het resultaat, en vergelijk het vervolgens met de belangrijke equivalentie die we eerst zagen. Wat blijkt?</td><td>2</td><td>"Er bestaat een x waarvoor niet Q geldt" is het zelfde als "Het is niet zo dat voor alle x Q geldt".
"Het is niet zo voor alle x dat Q geldt" is het zelfde als "Er bestaat een x waarvoor niet Q geldt".</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>29</td><td>Schrijf de volgende bewering op in symbolische vorm: als A ⊆ B, bestaat er geen x in A die niet in B zit.</td><td>3</td><td>A ⊆ B => (∀x ∈ A : ¬(x ∉ B))</td><td>Waarom zo moeilijk? A ⊆ B => (∀x ∈ A : x ∈ B)</td><td></td></tr>
<tr><td>30</td><td>Verbind elke bewering links met alle beweringen rechts die ermee equivalent zijn.
1. A ⊆ B a. ∀x ∈ A : x ∈ B
2. A ∩ B /= ∅ b. ∃x ∈ A : x ∈ B
c. ∃x ∈ B : x /∈ B
3. A ⊂ B d. (∀x ∈ A : x ∈ B) ⋀ (∃x ∈ B : x /∈ A)
e. (/∃x ∈ A : x ∈ B) ⋁ (/∃x ∈ B : x ∈ A)
4. A = B f. (/∃x ∈ A : x ∈ B) ⋀ (/∃x ∈ B : x ∈ A)
g. (∀x ∈ A : x ∈ B) ⋀ (∀x ∈ B : x ∈ A)
5. A /⊆ B h. ∃x ∈ A : x /∈ B</td><td>2</td><td>
Oefening 2.29. Schrijf de volgende bewering op in symbolische vorm
B, bestaat er geen x in A die niet in B zit.
Oefening 2.30. Verbind elke bewering links met alle beweringen
ermee equivalent zijn.
A ⊆ B ∀x ∈ A : x ∈ B
A ∩ B ≠ ∅ ∃x ∈ A : x ∈ B
∃x ∈ B : x ∉ B
A ⊂ B (∀x ∈ A : x ∈ B) ∧ (∃x ∈ B : x ∉ A)
(∄x ∈ A : x ∈ B) ∨ (∄x ∈ B : x ∈ A)
A = B (∄x ∈ A : x ∈ B) ∧ (∄x ∈ B : x ∈ A)
(∀x ∈ A : x ∈ B) ∧ (∀x ∈ B : x ∈ A)
A ⊈ B ∃x ∈ A : x ∉ B
2.10.5 Meerdere kwantificaties
Symbolen als ∀ en ∃ worden kwantoren genoemd. ∀ is de univ
∃ de existentiële. Soms willen we meerdere variabelen kwantific
bewering. Bijvoorbeeld:</td><td>FOUT!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!</td><td></td></tr>
</table>

31	Zij S de verzameling studenten aan de KU Leuven, en V de verzameling van alle vakken aangeboden door de KU Leuven. Schrijf de volgende beweringen op door gebruik te maken van kwantoren en variabelen. • elke student volgt minstens 1 vak • er is een vak dat door alle studenten gevolgd wordt.	2	a) $\forall x \in S$: $\exists y \in V$: studentVolgtVak(x,y) b) $\exists y \in V$: $\forall x \in S$: studentVolgtVak(x,y)		
32	Is er een verschil tussen (P is hier een willekeurige bewering) • $\forall x, y \in S : P$ en $\forall x \in S : \forall y \in S : P$ • $\forall x \in S : \forall y \in S : P$ en $\forall y \in S : \forall x \in S : P$ • $\forall x \in S : \exists y \in S : P$ en $\exists y \in S : \forall x \in S : P$ of zijn de linkse en rechtse bewering telkens equivalent?	3	a) Neen b) Neen, een voor alle kan omgewisseld worden c) Ja, een voor alle en er een bestaat mogen niet zomaar omgewisseld worden		
33	Zij P(x, S) de bewering "x is een element van S". Welk van de volgende beweringen is dan juist? • $P(x, A) \land P(x, B) \Leftrightarrow P(x, A \cap B)$ • $P(x, A) \land P(x, B) \Leftrightarrow P(x, A \cup B)$	3	1. ja 2. neen (links impliceert rechts maar niet omgekeerd)		
34	We zagen eerder de beweringen "Niet alle collega's zijn op het werk geraakt", "alle collega's zijn niet op het werk geraakt", en "geen enkele collega is op het werk geraakt". Schrijf alle drie deze beweringen formeel op. Gebruik hierbij C als de verzameling van alle collega's, en W(x) voor de bewering "x is op het werk geraakt".	3	1. $\neg\forall x \in C: W(x)$ 2. $\forall x \in C: \neg W(x)$ 3. $\nexists x \in C: W(x)$		
35	Toon aan dat $P \land Q \Rightarrow P$ een tautologie is door een waarheidstabel te construeren.	3	P $\mid$ Q $\mid$ $P \land Q$ $\mid$ $P \land Q \Rightarrow P$ -- waar waar waar waar waar onwaar onwaar waar onwaar waar onwaar waar onwaar onwaar onwaar waar		
36	Toon aan dat $P \land Q \Rightarrow P \lor Q$ een tautologie is, door rekenregels uit Tabel 2.1 toe te passen.	3	$P \land Q \Rightarrow P \lor Q$ $\neg(P \land Q) \lor (P \lor Q)$ $(\neg P \lor \neg Q) \lor (P \lor Q)$ $(\neg P \lor P) \lor (\neg Q \lor Q)$		
37	Toon op analoge manier als hierboven aan dat uit de distributiviteit van $\cup$ over $\cap$ de distributiviteit van $\lor$ over $\land$ volgt. Toon dat laatste ook aan via een waarheidstabel.	0			
38	Welk concept uit de verzamelingenleer sluit het beste aan bij de logische implicatie, $\Rightarrow$?	2	$P \Rightarrow Q$ ¬P v Q --> P^c U Q		
39	Binnen de bovenstaande analogie komen met de logische waarden waar en onwaar specifieke verzamelingen overeen. Welke zijn dat?	1	A en A^c		

Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Toestandscode	Betekenis		Hoe ga je te werk?
0	Nog niet opgelost		1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
1	Opgelost - maar sterke twijfels		2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
2	Opgelost - waarschijnlijk juist		3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
3	Opgelost - juist		4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)
4	Opgelost én nagekeken door een assistent		
5	Ter controle gestuurd naar een assistent		

Hoofdstuk 3

Nummer	Opgave	Toestand	Oplossing	Opmerkingen
1	Ga terug naar sectie 1.4 van deze tekst (operaties op verzamelingen). Identificeer voor elke subsectie (1.4.1, 1.4.2, . . .) de term die gedefinieerd wordt, hoe die term gedefinieerd wordt, en welke notatie geïntroduceerd wordt. Herschrijf vervolgens de uitleg die daar staat in definitie-stijl.	3	1.4.1 De **doorsnede** is de verzameling die bestaat uit de gemeenschappelijke elementen van de samenstellende verzamelingen. De doorsnede van de verzamelingen A en B wordt genoteerd als A ∩ B. De **doorsnede** van twee verzamelingen A en B, genoteerd A ∩ B, is de verzameling van alle objecten die zowel in A als in B zitten. 1.4.2 De **unie** van twee verzamelingen A en B, genoteerd A U B, is de verzameling van alle objecten die in A, in B of in beide zitten. 1.4.3 Het **verschil** van twee verzamelingen A en B, genoteerd A\B, zijn alle elementen van A die niet in B voorkomen. 1.4.4 Het **symmetrisch** verschil van twee verzamelingen A en B, genoteerd A Δ B, is de verzameling van alle objecten die in A en in B zitten maar niet in beiden. 1.4.5 Het **complement** van een verzameling A, genoteerd A^c, is de verzameling van alle elementen die niet in A zitten.	
2	Toon aan dat uit bovenstaande axioma's automatisch volgt: • ∅ is een gebeurtenis. • als A en B gebeurtenissen zijn, is ook A ∪ B een gebeurtenis.	3	a) Aangezien A een gebeurtenis is en Ac ook, is A ∩ Ac ook een gebeurtenis. A ∩ Ac = ∅ dus ∅ is een gebeurtenis b) Aangezien A ∪ B = (Ac ∩ Bc)c en Ac een gebeurtenis is, Bc een gebeurtenis is en dus ook Ac ∩ Bc een gebeurtenis is. Zal (Ac ∩ Bc)c een gebeurtenis zijn waaruit volgt dat A ∪ B een gebeurtenis is.	
3	Toon aan dat uit de definities en axioma's ook de volgende rekenregels volgen: • P(∅) = 0 • P(A^c) = 1 − P(A)	3	a) P(∅ U Ω) = P(Ω) + P(∅) (want ∅ ∩ Ω = ∅) P(Ω) = P(Ω) + P(∅) (want ∅ U Ω = Ω) P(∅) = P(Ω) - P(Ω) = 0 b) P(Ac U A) = P(Ω) = 1 P(Ac U A) = P(Ac) + P(A) (want Ac ∩ A = ∅) P(Ac) + P(A) = 1 P(Ac) = 1 - P(A)	

Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Toestandscode	Betekenis
0	Nog niet opgelost
1	Opgelost - maar sterke twijfels
2	Opgelost - waarschijnlijk juist
3	Opgelost - juist
4	Opgelost én nagekeken door een assistent
5	Ter controle gestuurd naar een assistent

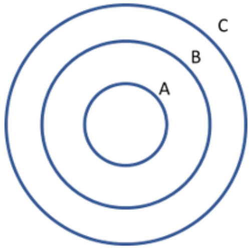
Hoe ga je te werk?

1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)

Hoofdstuk 4

Nummer	Opgave	Toestand	Oplossing		Opmerkingen
1	Bewijs dat (A \ B)c = Ac ∪ B, door gebruik te maken van de rekenregels uit de verzamelingenleer, en door herhaalde substitutie. Verklaar elke stap in detail, zoals in Voorbeeld 4.7.	3	$A^c \cup B = (A \setminus B)^c$ $= (A \cap B^c)^c$ $= A^c \cup (B^c)^c$ $= A^c \cup B$	$A \setminus B = A \cap B^c$ De Morgan $(A^c)^c = A$	In LATEX: A^c\cup B=\left(A\setminus B\right)^c A\setminus B=A\cap B^c =\left(A\cap B^c\right)^c De Morgan =A^c\cup\left(B^c\right)^c \left(A^c\right)^c=A =A^c\cup B
2	Bewijs dat (A ∩ B) ∪ (A∆B) = A ∪ B door gebruik te maken van de rekenregels uit de verzamelingenleer, en door herhaalde substitutie.	3	(A ∩ B) U (A Δ B) = (A ∩ B) U ((A\B) U (B\A)) = (A ∩ B) U ((A ∩ Bc) U (B ∩ Ac)) = (B U Bc) ∩ A U (B ∩ Ac) = A U (B ∩ Ac) = (A U B) ∩ (A U Ac) = (A U B)	 (A Δ B) = (A\B) U (B\A) (A\B) = A ∩ Bc omgekeerde distributiviteit U ∩ A = A distributiviteit A U Ac = U en A ∩ U = A	

3 | Toon de transitiviteit van ⊆ aan via een Venn-diagram. Toon de transitiviteit van ⇒ en ⇔ aan via waarheidstabellen. | 3



P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q \land Q \Rightarrow R) = X$	$(P \Rightarrow R) = Y$	$X \Rightarrow Y$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$Q \Leftrightarrow R$	$(P \Leftrightarrow Q \land Q \Leftrightarrow R) = X$	$(P \Leftrightarrow R) = Y$	$X \Rightarrow Y$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

4 | Zoek voor het bewijs in het vorige voorbeeld de nummers van de gebruikte rekenregels op in tabel 4.1. | 2 | 11,32,33

5 | Bewijs de volgende eigenschappen door een keten van = te construeren.
• (A ∩ B) ∪ (A∆B) = A ∪ B
• (A ∪ B) \ (A ∩ B) = A∆B
• (A ∪ B ∪ C) \ (A ∪ B) = C \ (A ∪ B)
• (Ac ∪ Bc)c = A ∩ B
• (A ∪ B)c ∩ Ac ∩ Bc = (A ∪ B)c
Zet bij elke gelijkheid die je gebruikt het nummer van de rekenregel in tabel 4.1 die die stap verantwoordt. | 2

1) 12; 20; 27; 20; 27; 11; 21; 2; 13; 5
2) 22; 11; 25; 19; 3; 11; 12
3) 22; 11; 24; 3; 7; 8
5) 24; 5; 24

Als iemand zich geroepen voelt om dit helemaal uit te schrijven... Dit zijn mijn nummertjes die ik gebruikt heb.

Ketting is gwn substitutie maar dan allemaal acher elkaar geschreven?

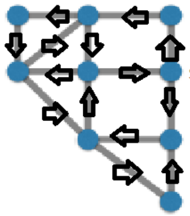
6 | Toon de bovenstaande logische equivalentie aan via een waarheidstabel. | 3

P	Q	P => Q	Q => P	P => Q ^ Q => P	P <=> Q
W	W	W	W	W	W
W	O	O	W	O	O
O	W	W	O	O	O
O	O	W	W	W	W

7 | Bewijs de volgende stelling: A ⊆ B ⇔ A ∪ B = B. | 3

Van links naar rechts: Enkel onwaar als A ⊆ B \land A ∪ B \neq B.
Als A ∪ B \neq B, dan bevat A een element van A dat niet in B zit, m.a.w. A is geen deelverzameling van B.
Dit is tegenstrijdig, dus kan de uitspraak nooit onwaar zijn.

Van rechts naar links: Enkel onwaar als A \not\subset B en A ∪ B = B.
Als A \not\subset B, dan bevat A een element dat niet in B zit.
Als A ∪ B = B, dan bevat A enkel elementen die ook in B zitten.
Contradictie. Tak van het KE-bewijs gesloten.

8	In stelling 4.1 hierboven wordt niet alleen wederzijdse implicatie, maar ook wederzijdse inclusie gebruikt. Duid aan waar.	0			
9	Bewijs dat (A ∩ B) ∪ A = A.	2	(A ∪ B) ⊆ A en X ⊆ Y => X ∪ Y ⊆ Y(sectie 1.6.10) subsitueer X met A ∪ B en Y met A en pas modus ponens toe		
10	Een wegenwerker moet op een aantal wegen de middellijnen schilderen. Een kaartje met de wegen erop is hierbij gevoegd. Bewijs dat het mogelijk is voor de wegwerker om alle wegen te doorlopen zonder een weg 2 keer te moeten doorlopen (en zonder te teleporteren).	3		Bewijs door tekening	
11	Bewijs dat 52841 niet priem is; met andere woorden: bewijs dat er een getal x bestaat, 1 < x < 52841, waarvan 52841 een veelvoud is.	3	52841 = 53 * 997		
12	Het bewijs van Stelling 3.1 op pagina 61 maakt gebruik van gevalsonderscheid. Duid aan, in het bewijs, waar het gevalsonderscheid precies gemaakt wordt.	0			
13	Het bewijs van Stelling 3.1 op pagina 61 is een bewijs uit het ongerijmde. Duid aan in de stelling op welke manier de techniek daar precies gebruikt wordt.	0			
14	Welk patroon, naast het bewijs uit het ongerijmde, vind je nog terug in bovenstaand bewijs?	3	Gevalsonderscheid		
15	Het volgende is een uittreksel uit een examenopgave en het antwoord erop: Opgave: Bewijs dat elke niet-vlakke graaf minstens 5 knopen bevat. Antwoord: We bewijzen dit uit het ongerijmde. Beschouw een graaf die wel vlak is. . . . Wat is er mis met dit antwoord?	3	Zo kun je niet bewijzen dat een niet-vlakke graaf minstens 5 knopen bevat. Je gaat hoogstwaarschijnlijk geen nuttige contradictie bekomen. Volgens mij moet je beginnen met 'Beschouw een niet-vlakke graaf met 4 knopen', waaruit blijkt dat deze niet kan bestaan en/of dat deze uiteindelijk toch 5 knopen zou bevatten. Inderdaad, als we aannemen dat de graaf wel vlak is gaan we iets bewijzen over het feit dat de graaf al dan niet vlak is. Dit is niet wat er bewezen moet worden, er is een fout gemaakt in het nemen van de negatie van de stelling.		
16	Geef in het bovenstaande bewijs aan waar de inductiehypothese gebruikt wordt.	3	De 2e stap wordt de inductie hypothese afgesplitst van de inductiestap		
17	Welke bewijspatronen herken je in het bewijs van de inductiebasis, en in het bewijs van de inductiestap? Op een bepaald moment wordt een distributiviteitsregel gebruikt – welke regel, en waar in het bewijs?	0			
18	Klopt de volgende stelling? Zo niet, wat is er fout in het bewijs? Stelling. Een deelverzameling van N die n elementen bevat en die het getal 1 bevat, is steeds gelijk aan {1, 2, 3, . . . , n}. Bewijs. Door inductie. Zij P(n) de eigenschap "is gelijk aan {1, 2, . . . , n}". Inductiebasis: n = 1. Een verzameling van 1 element die 1 bevat, is noodzakelijkerwijs gelijk aan {1}. P(1) geldt dus. Inductiestap: we moeten bewijzen dat P(n) ⇒ P(n + 1), voor alle n ≥ 1. Welnu: neem een willekeurige verzameling van n elementen die 1 bevat. Uit de inductiehypothese volgt dat P (n) geldt, m.a.w. de verzameling is gelijk aan {1, 2, 3, . . . , n}. Voeg nu het getal n + 1 toe. Het resultaat is een verzameling van n + 1 elementen die 1 bevat, en die is gelijk aan {1, 2, . . . , n+ 1}. Deze redenering klopt voor elke n ≥ 1. Daarmee is de inductiestap bewezen.	3	Neen, {1, 5, 9, 6} is ook een deelverzameling van N. In het bewijs voeg je het getal n+1 toe, maar n stelt het aantal elementen voor en niet een getal. Je kan evengoed een ander getal toevoegen.		

19	Klopt de volgende stelling? Zo niet, wat is er fout in het bewijs? Stelling. In een verzameling van n ≥ 1 paarden hebben steeds alle paarden dezelfde kleur. Bewijs. Door inductie. Inductiebasis: n = 1. In een verzameling die 1 paard bevat, geldt dat alle paarden dezelfde kleur hebben. Inductiestap: we bewijzen het volgende: als in een verzameling van n paarden steeds alle paarden dezelfde kleur hebben, dan hebben in een verzameling van n+1 paarden ook steeds alle paarden dezelfde kleur. Welnu: neem een willekeurige verzameling S met n+1 paarden. Haal er 1 paard uit; noem dit paard x. In de overblijvende verzameling hebben alle paarden dezelfde kleur (inductiehypothese); noem die kleur K. We weten nu dat alle elementen, behalve eventueel x, kleur K hebben. Voeg nu x weer toe en haal een ander paard y er uit. De verzameling S \ {y} bevat n paarden en die hebben allemaal dezelfde kleur (inductiehypothese). x zit ook in die verzameling en heeft dus dezelfde kleur als alle andere elementen, namelijk K. We zien dus dat alle paarden in S \ {x} kleur K hebben, en x ook; dus: alle paarden in S hebben kleur K. Daarmee is de inductiestap bewezen.	3	Men gaat er vanuit dat de 2 verzamelingen gemeenschappelijke paarden bevatten. Dit is niet noodzakelijk het geval. Stel dat n+1 = 2. De verzameling bevat 2 paarden {zwart,bruin}. Als we er één paard uithalen in dit geval het zwarte, krijgen we {bruin} waarin alle paarden dezelfde kleur hebben. Als we het zwarte paard er terug insteken en een ander paard eruit halen krijgen we {zwart}. Ook hier hebben alle paarden weer dezelfde kleur.		
20	Zij P een willekeurige bewering. Druk de betekenis van “ik weet niet of P” uit, in termen van “ik weet dat P”, door op de juiste plaats een ¬ toe te voegen. Vergelijk met “ik denk niet dat P” in het bovenstaande voorbeeld.	3	ik ¬weet dat P		
21	Bewijs dat ¬P ⇒ Q ≡ ¬Q ⇒ P.	3	P Q ¬ P => Q ¬ Q => P W W W W W O W W O W W W O O O O		
22	Bewijs dat voor alle verzamelingen A en B, {x | x ∈ A ⇒ x ∈ B} equivalent is met (A \ B)c.	1	de implicatie zegt dat als +x element is van A, x ook element is van B, over de gevallen dat x geen element is van A, wordt de implicatie als waar gezien dus alle elementen die niet in A zitten, zitten wel in B, teken dan een venn-diagram, en arceer de gebieden en dan zie je dat het dezelfde gearceerde gebieden zijn		
23	Wat is verkeerd aan het volgende bewijs? Stelling. Voor alle verzamelingen A en B geldt: A \ B ∪ B = A. Bewijs. Zie tekening. Als we eerst A \ B berekenen, en dan de unie ervan nemen met B, is het resultaat gelijk aan A.	3	We nemen aan dat B een deelverzameling van A is terwijl dit niet gegeven is, we nemen dus niet het triviaalste geval.		
24	Stel dat iemand het volgende beweert: “voor elke driehoek met zijden van lengte a, b, en c, geldt a2 + b2 = c2. Bewijs: per tekening, zie figuur 4.16.” Het is gemakkelijk in te zien dat deze stelling niet geldt. Er moet dus iets fout zijn met het bewijs per tekening. Wat is er fout?	3	Er wordt aangenomen dat elke driehoek een rechthoekige driehoek is. Er wordt geen rekening gehouden met het meest algemene geval.		
25	Vul het bovenstaande bewijs aan.	0			
26	Welke bewijstechnieken herken je in het bovenstaande bewijs? (Denk goed na, ze zijn impliciet gebruikt.)	0			
27	Denk na over het verschil tussen ∃c > 0 : ∀i : Gi−1 − Gi ≥ c en ∀i : Gi−1 − Gi > 0. Zijn beide beweringen equivalent? Zo nee, impliceert de ene de andere?	3	De beweringen zijn niet equivalent. Bij de eerste bewering is Gi-1 - Gi groter of gelijk aan c, met c een waarde groter dan 0. c is hierdoor al groter of gelijk aan 1. ∃c > 0 : ∀i : Gi−1 − Gi ≥ c => ∀i : Gi−1 − Gi > 0.		
28	Beschouw een if-opdracht zonder else-gedeelte. Welke voorwaarden zijn voldaan op welk punt in de code?	2	if P then blok A - aan het begin van blok A geldt P - als P_A geldt aan het eind van blok A P_A dan geldt vlak na de if-opdracht P_A		

29	Sommige talen hebben een “do-until” opdracht, van de vorm: do { . . . } until P. Deze betekent: blijf de instructies tussen de accolades herhalen, tot P waar is na uitvoering van die instructies. Schrijf op welke voorwaarden voldaan zijn op welk punt in de code.	2	begin: niet P einde: P	"begin: niet P" hoeft toch niet?	
30	Bewijs dat (A ∪ B) ∩ (B ∪ A) = (A ∪ B) ∪ (B ∪ A).	2	(A ∪ B) = (B ∪ A) vanwege de commutativiteit van de unie. Dan kunnen we de stelling herschrijven als (A ∪ B) ∩ (A ∪ B) = (A ∪ B) ∪ (A ∪ B). (A ∪ B) ∩ (A ∪ B) = A ∪ B (A ∪ B) ∪ (A ∪ B) = A ∪ B		
31	Bewijs dat A \ B = A ⇔ A ∩ B = ∅.	3	Links naar rechts: Is enkel onwaar als A \ B = A en A ∩ B \not\eq ∅. Als het verschil van A en B A is, dan hebben A en B geen enkel element gemeenschappelijk. Als de doorsnede van A en B niet leeg is, dan hebben A en B minstens 1 element gemeenschappelijk. Contradictie --> altijd waar Rechts naar links: Is enkel onwaar als A \ B \not\eq A en A ∩ B = ∅. Als het verschil van A en B niet A is, dan hebben A en B minstens 1 element gemeenschappelijk. Als de doorsnede van A en B leeg is, dan hebben A en B geen gemeenschappelijke elementen. Contradictie --> altijd waar		
32	Zij 2N de verzameling van alle even getallen, 3N de verzameling van alle drievouden, en 6N de verzameling van alle zesvouden. Bewijs dat 2N ∩ 3N = 6N.	4	Zie toledo		
33	Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Je mag hierbij volgende eigenschap gebruiken (zonder deze te bewijzen): elk natuurlijk getal groter dan 1 kan als een product van priemgetallen geschreven worden.	4	Zie toledo		
34	Op de website http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.peasant.html staat een uitleg over een alternatieve manier om getallen te vermenigvuldigen: het “Russian peasants” algoritme. Er wordt geargumenteerd waarom dit algoritme werkt. (1) Schrijf het algoritme uit in pseudo-code. (2) Schrijf de invariant op die door het algoritme bewaard wordt. Als je de uitleg op de website aandachtig leest, zou je die invariant moeten kunnen opschrijven.	0			

Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Toestandscode	Betekenis		Hoe ga je te werk?
0	Nog niet opgelost		1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
1	Opgelost - maar sterke twijfels		2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
2	Opgelost - waarschijnlijk juist		3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
3	Opgelost - juist		4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)
4	Opgelost én nagekeken door een assistent		
5	Ter controle gestuurd naar een assistent		

Hoofdstuk 5

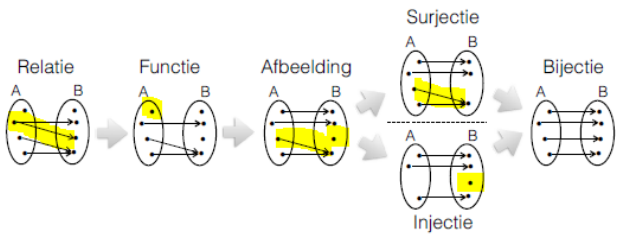
Nummer	Opgave	Toestand	Oplossing	Opmerkingen
1	Zij A en B twee verschillende verzamelingen. Is A×B = B×A? Bewijs je antwoord formeel.	3	Neen aangezien een tupel een bepaalde volgorde heeft en de twee verzamelingen in dit geval niet hetzelfde zijn. Bewijs uit het ongerijmde: Stel A = {1} en B = {2} AxB={(1,2)} BxA={(2,1)} Zoals te zien zijn ze niet gelijk en dus klopt de bewering niet.	Constructie? Bewijs door tegenvoorbeeld
2	Zij P = { Bart Simpson, Homer Simpson, Marge Simpson, Lisa Simpson, Maggie Simpson}. Homer en Marge zijn de ouders van Bart, Lisa en Maggie. Schrijf de relatie “. . . is een ouder van . . . ” op als een verzameling koppels.	3	... is een ouder van ... = {(Homer Simpson,Bart Simpson),(Homer Simpson,Lisa Simpson),(Homer Simpson,Maggie Simpson),(Marge Simpson,Bart Simpson),(Marge Simpson,Lisa Simpson),(Marge Simpson,Maggie Simpson)}	
3	Zij S de verzameling van alle studenten aan de KU Leuven, en V de verzameling van alle vakken. Het aantal ECTS-punten dat een vak waard is, is een natuurlijk getal (dus een element van N). De score die een student op een vak behaald heeft, is een natuurlijk getal. Beschouw de volgende relaties: • Volgt: geeft aan welke studenten welke vakken volgen • ECTS: geeft aan hoeveel ECTS-punten elk vak waard is • Score: geeft aan welke student, op welk vak, welke score behaald heeft • Geslaagd: geeft aan welke studenten voor welke vakken geslaagd zijn Beantwoord nu volgende vragen: 1. Geef voor elke relatie aan van welk Cartesisch product die relatie een deelverzameling is. 2. Druk de volgende bewering volledig in symbolen uit: een student heeft alleen een score voor de vakken die hij/zij volgt 3. Een student slaagt voor een vak als hij/zij een score van minstens 10 (op 20) behaald voor dat vak. Door deze regel is de relatie Geslaagd volledig bepaald, gegeven de andere relaties. Definieer de relatie Geslaagd volledig in symbolen.	3	1) volgt: S x V ECTS: V x N Score: S x V x N Geslaagd: S X V 2)∀s ∈ S: ∃v ∈ V: ∃x ∈ N: Score(s,v,x) => Volgt(s,v) 3) Geslaagd = {(x,y) | ∃z: Score(x, y, z) ∧ z >= 10}	

4	Zij E de verzameling van alles wat een element van een verzameling kan zijn, en V de verzameling van alle verzamelingen. ∈ en ⊆ kunnen dan als relaties beschouwd worden. Van welk Cartesisch product zijn ∈ en ⊆ een deelverzameling?	3	∈: E x V ⊆: V x V	
5	Zij R de relatie “. . . is een ouder van . . . ”. Wat is de inverse relatie van R?	3	Is kind van	
6	Zij M de verzameling van alle mensen, en R ⊆ M2 de relatie “. . . heeft als ouder . . . ”. Wat is de relatie R ◦ R?	3	Heeft als grootouder	
7	Bewijs dat in de bovenstaande definitie ∃z ∈ B vervangen zou kunnen worden door ∃z ∈ C of ∃z ∈ B ∩ C zonder dat dat de betekenis van de definitie verandert.	2	Volgens de definitie van een Samengestelde Relatie worden de relatie S gevormd door het Carthesisch product van A en B te nemen en de relatie R door het Cart.Prod. te nemen van C en D. Omdat S (x,z) bevat en R (z,y) bevat moet volgens de definitie van een cart. prod. z zowel in B als in C liggen. Omdat dit een gemeenschappelijk element is kan men ook zeggen dat z in B doorsnede C zit.	Q: In de hint staat dat we moeten voorstellen dat B en C geen gemeenschappelijke elementen hebben. Er kan toch dan geen samengestelde relatie plaatsvinden toch? (thats probably the whole point, just wanna be sure) A: Peis dat het op zich niet zo veel uitmaakt; blockeel wilt gwn zeggen dat er gemeenschappelijke elementen moeten zijn, anders werkt het niet)
8	Bewijs bovenstaande stelling. Hint: Gebruik de definitie van X◦Y (voor X en Y willekeurige relaties) om de relatie T◦(S◦R) op te schrijven. Doe hetzelfde voor (T ◦ S) ◦ R. Toon aan dat de resultaten gelijk zijn.	4	Zie Toledo	
9	Geldt in het algemeen dat R ◦ S = S ◦ R? Geef een bewijs voor je antwoord.	3	Neen. Bewijs door constructie: Stel R ⊆ Z X Z is de relatie ... (-2) ... Stel S ⊆ Z X Z is de relatie ... (/2) ... (R ◦ S)(6) = 3 - 2 = 1 ≠ (S ◦ R)(6) = 4 / 2 = 2 In dit geval is R ◦ S dus niet gelijk aan S ◦ R.	
10	Zij R de relatie “. . . is een kind van . . . ”. Wat is de relatie R2, R3, R4, . . . ? Waaraan is R ∪ R2 ∪ R3 gelijk?	3	Verzameling van alle voorouders	
11	Bereken het resultaat van vragen 2 en 4 in bovenstaand voorbeeld.	0		
12	Bewijs dat als R(A, B) en S(B, C) binaire relaties zijn, dan is S ◦ R = πA,C (R ∗ S).	2	R * S geeft een nieuwe relatie P(A, B, C) Door de projectie houden we enkel nog (A, C) over Tadaa	

Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Toestandscode	Betekenis		Hoe ga je te werk?
0	Nog niet opgelost		1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
1	Opgelost - maar sterke twijfels		2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
2	Opgelost - waarschijnlijk juist		3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
3	Opgelost - juist		4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)
4	Opgelost én nagekeken door een assistent		
5	Ter controle gestuurd naar een assistent		

Hoofdstuk 6

Nummer	Opgave	Toestand	Oplossing	Opmerkingen
1	Welke van de volgende relaties zijn functies? En voor welke relaties is de inverse relatie een functie? • de moeder van . . . is . . . • . . . is een ouder van . . . • . . . heeft de . . . nationaliteit • . . . is gehuwd met . . . • . . . is de koning van . . . • de koning van . . . is . . . • . . . heeft als inverse relatie . . .	3	1. functie, niet invers (een moeder kan verschillende kinderen hebben) 2. geen functie (je kan ouder van meerdere mensen zijn), niet invers (de meesten hebben 2 ouders) 3. functie (indien we ervan uit gaan dat iedereen maar 1 nationaliteit heeft), niet invers (de nationaliteit belg behoord aan meerdere personen) 4. functie, inverse ook (in een monogame wereld) 5. functie (je kan maar van 1 land koning zijn), inverse niet (zowel Albert als Philippe zijn op dit moment koning) 6. functie, inverse ook	
2	Druk de beweringen “Filip is de koning van België” en “Willem-Alexander is de koning van Nederland” uit met de hier ingevoerde notatie.	3	1. Koning(België) = Filip 2. Koning(Nederland) = Willem-Alexander	
3	Schrijf de bovenstaande definitie in symbolen op.	2	f: $A \rightarrow B$ is een surjectie $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$	
4	Duid in figuur 6.1 op het diagram bij “relatie” aan welk element van A of B ervoor zorgt dat de relatie geen functie is. Duid bij het diagram bij “functie” aan welk element ervoor zorgt dat de functie geen afbeelding is, en zo verder voor afbeelding, surjectie en injectie.	2		
5	Formuleer de volgende bewering als een stelling en bewijs die stelling: f is een bijectie als en slechts als f zowel een surjectie als een injectie is.	2	stelling: $\forall y \in B, \exists! x \in A : f(x) = y \Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists x \in Y : f(x) = y) \wedge (\forall x \in A: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$ Bewijs nog nodig!	bewijs nog niet gevonden, maar denk dat stelling wel klopt zo, rechts is definitie van bijectie en links is definitie van surjectie en injectie
6	Zij R, F, A, I, S, en B respectievelijk de verzameling van alle relaties, functies, afbeeldingen, injecties, surjecties en bijecties van een gegeven verzameling A naar een gegeven verzameling B. Welke deelverzameling-relaties bestaan er tussen al deze verzamelingen?	3	F is een deelverzameling van R A is een deelverzameling van F I en S zijn een deelverzameling van A B is een deelverzameling van I en S, sterker nog, het is de doorsnede van I en S	Zie afbeelding bovenaan blz. 116 Iedere bijectie is een functie, maar niet iedere functie is een bijectie

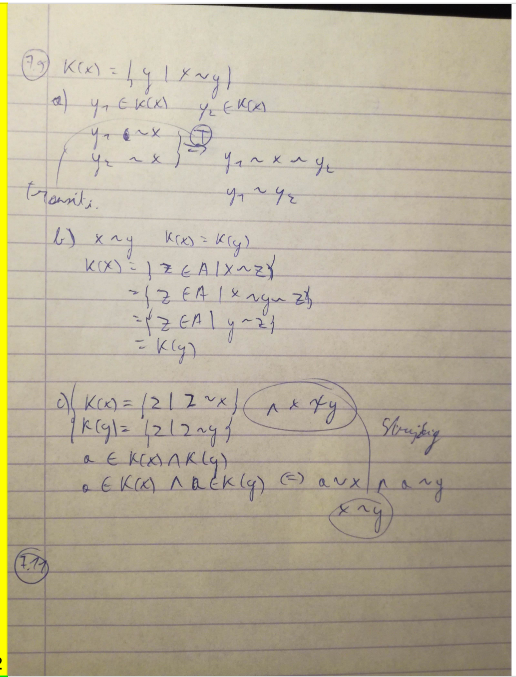
7	Zij V de verzameling van alle mogelijke verzamelingen over een universum U (dus V = P(U)). Definieer de complement-operator uit de verzamelingenleer als een functie over V. Is het een afbeelding, een injectie, een surjectie, een bijectie, een transformatie, een permutatie?	2	Permutatie (elke verzameling heeft precies 1 complement, en is ook het complement van precies 1 verzameling)	
8	Definieer de operator ∩ uit de verzamelingenleer als een functie. Is het een afbeelding, een injectie, een surjectie, een bijectie?	3	iedere koppel verzamelingen heeft een doorsnede (al is het soms de lege verzameling) => afbeelding; een verzameling is zelf soms de doorsnede van meer dan 1 koppel verzamelingen ({1,2} ∩ {2,3} = {2,4} ∩ {1,2,3} = {2} => geen injectie ; iedere verzameling is de doorsnede van minstens 1 koppel verzamelingen (X ∩ X = X is altijd waar) => surjectie ; conclusie : Surjectie	Ik denk eerder surjectie, want A \cap B = A \cap (B \cap B) --> Dezelfde functiewaarden voor verschillende veranderlijken
9	Zij V de functie “vader” (m.a.w. V (x) = y als en slechts als y de vader van x is) en M de functie “moeder”. Wat is dan de functie M ◦ V ? Ter vergelijking: als O de relatie “ouder” is, wat is dan O2?	3	1. De moeder van de vader van ... 2. een ouder van een ouder van...	M na V: Met V = y is de vader van (x) dan is M na V = de moeder van (de vader van X)
10	Bewijs dat f inverteerbaar is als en slechts als ∀x ∈ A : f(x) = f(x0) ⇒ x = x0.	0		
11	Bewijs dat de inverse van een inverteerbare functie steeds inverteerbaar is.	0		
12	Welke van de volgende functies zijn inverteerbaar? Schrijf de inverse functie op, als ze bestaat. (V is hier de machtsverzameling van een universum U; het doet er niet toe wat U precies is.) • f1 : R0 → R0 : x → 1/x • f2 : R → R : x → x^2 • f3 : R+ → R : x → log(x) • f4 : V → V : X → X^c	2	1) Inverteerbaar, inverse heeft zelfde voorschrift 2) Niet inverteerbaar 3) Inverteerbaar, inverse is e^x 4) Inverteerbaar, complement en verzameling zijn elkaars inverse	4) Als (a, b) het enige koppel van f is, zijn alle koppels buiten (a,b) dan van f^C? 3) e^x? da kan toch eender welk getal zijn? --> a^x A: nee, als je beide leden vermenigvuldigd met e^, dan staat er e^y = e^(log(x)); e^log heft erlkaar op, dus staat er e^y=x, switch namen en je bent er <-- dit hangt er vanaf hoe je log x interpreteert, als ln x(e^x) of als het basis van de logaritmische schaal (10^x)
13	Bewijs dat de identiteitsfunctie een bijectie is.	4	Zie Toledo	
14	Stel dat f : A → B een inverteerbare functie is die geen afbeelding is. Zij D ⊂ A het domein van f. Waaraan is f−1 ◦ f in dit geval gelijk? Bewijs.	0		I, neen?
15	Bewijs de volgende stelling. Als f : A → B een inverteerbare functie is met bereik S ⊆ B, dan geldt: f ◦ f−1 = iS.	4	Zie Toledo	

Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Toestandscode	Betekenis		Hoe ga je te werk?
0	Nog niet opgelost		1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
1	Opgelost - maar sterke twijfels		2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
2	Opgelost - waarschijnlijk juist		3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
3	Opgelost - juist		4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)
4	Opgelost én nagekeken door een assistent		
5	Ter controle gestuurd naar een assistent		

Hoofdstuk 7

Nummer	Opgave	Toestand	Oplossing	Opmerkingen
1	Zij A = {1, 2, 3}. Geef een voorbeeld van een relatie over A die niet symmetrisch en ook niet antisymmetrisch is.	3	R = {(1,2), (2,1), (3,2)}	ik denk {(1,2), (2,3),(3,1)} want als ge (1,2) en (2,1) hebt is het ni antisymmetrisch denk ik -> ze vragen toch voor een verzameling die ook NIET antisymmetrisch is? | de jonge heeft gelijk (1,2)(2,1) = symmetrisch. zie :p37 van de samenvatting voor voorbeelden :) Het antwoord moet dus R : {(1.2),(2,3),(3,2)} zijn
2	Bewijs: R is symmetrisch als en slechts als R = R−1. Uitzonderlijk kan een relatie zowel symmetrisch als antisymmetrisch zijn.	2	Links naar rechts: Enkel onwaar als R symmetrisch is en R \not\eq R^-1. Volgens de definitie van symmetrie: ∀x, y ∈ A : (x, y) ∈ R ⇔ (y, x) ∈ R Als R \not\eq R^-1, dan is er minstens 1 tuppel (a, b) in R, en (b, a) niet in R. Contradictie --> Altijd waar Rechts naar links: enkel onwaar als R niet symmetrisch is en R = R^-1. Als R = R^-1, dan geldt dat ∀x, y: (x, y) ∈ R ⇔ (y, x) ∈ R = definitie symmetrie Contradictie met R is niet symmetrisch --> Altijd waar	We bewijzen ⇔ door eerst => te bewijzen en dan <= (Wederzijdse implicatie)
3	Bewijs: als R zowel symmetrisch als antisymmetrisch is, geldt ∀(x, y) ∈ R : x = y.	3	Als R symmetrisch en antisymmetrisch is, dan voldoet het aan ∀x, y ∈ A : (x, y) ∈ R ⇔ (y, x) ∈ R en ∀x, y ∈ A : (x, y) ∈ R ∧ (y, x) ∈ R ⇒ x = y. Als (x, y) een element is van R, dan is (y, x) dat ook (symmetrie). Als (x, y) een element is en (y, x) ook, dan is x = y (antisymmetrie). Transitiviteit magie: Als (x, y) een element is van R, dan is x = y.	
4	Bewijs dat ⇔ een equivalentierelatie is.	3	Zie voorbeeld 7.5 waarbij je alle = vervangt door <=>	
5	Welke van de volgende relaties zijn equivalentierelaties? • . . . is even oud als . . . (waarbij leeftijd tot 1 jaar nauwkeurig gemeten wordt) • . . . is getrouwd met . . . • . . . is een ouder van . . . • . . . is een broer van . . . • . . . is een klasgenoot van . . .	3	1. ja 2. neen (niet reflexief) 3. neen (niet symmetrisch, reflexief en transitief) 4. neen (niet symmetrisch en transitief) 5. ja --> kunt ge u eigenklasgenoot zijn? --> goede vraag	Nee ge kunt u eigen klasgenoot niet zijn...

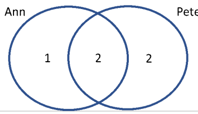
6	Bewijs de bovenstaande eigenschappen.	2		Indien je dit kan lezen, des te beter :p	
7	Hoe noemen we een equivalentieklasse voor de volgende equivalentierelaties: • “. . . is een klasgenoot van . . . ” • “. . . speelt in dezelfde ploeg als . . . ”	3	a) klas b) ploeg		
8	Zij V een verzameling voetballers die meedoen aan de wereldbeker voetbal. Zij ~ de relatie “. . . speelt voor dezelfde ploeg als . . . ”. Wat is dan V / ~?	3	Verzameling van alle verschillende ploegen.		
9	Welke van de volgende relaties zijn totale ordes, en welke zijn partiële ordes? • ≤, over R • ⊆, over alle verzamelingen • |, over Z (x|y betekent: x is een deler van y)	3	1) ja, elk getal is of groter of kleiner dan en getal, gwn definitie toepassen, moeilijk uit te leggen 2) partïele orde, het kan dat A geen deelverzamling van B is en dat B geen deelverzameling van A is 3) partïele orde, als x geen deler van y is, moet y geen deler van x zijn		
10	Formuleer de bovenstaande informele bewering, en de argumentatie ervoor, als een stelling met bewijs.	4			
11	Beschouw de geordende verzameling A, ⊆ met A = P({a, b, c, d}). Druk in woorden uit wat het infimum en het supremum in deze context betekent.	2	Aangezien A = {∅,{a},{b},...{a,b,c,d}} bevat infimum: ∅ supremum: {a, b, c, d}		
12	Bewijs, naar analogie met de bovenstaande stelling (maar zonder het bewijs van die stelling voor je te hebben), het volgende. Zij A = P(U) voor een bepaalde verzameling U. Voor A, ⊆ geldt: inf(X) = (Productteken)(V∈X) V.	0			
13	Beschouw de geordende verzameling N, |. Met welk reeds bekend concept komen het supremum en het infimum van een verzameling {x, y} hier overeen?	3	supremum: kleinst gemene veelvoud infimum: grootste gemene deler		
14	Bewijs de volgende stelling: Voor elke niet-lege X ⊆ A in een geordende verzameling A, ⊤ (orde-symbool) geldt: inf(X) ⊤ (orde-symbool) sup(X).	0	rip		

15	Beschouw A, ⊆ met A = P(U) voor een niet nader bepaalde U. Wat zijn sup(∅) en inf(∅) hier?	1	infimum: ∅ supremum: ∅	??? ?? Bruh ik begrijp de vraag niet eens	Helemaal mooi

Oefeningen Bewijzen en Redeneren voor Informatici

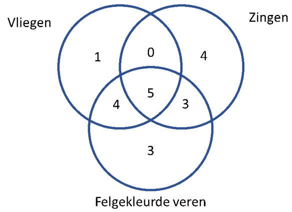
Toestandscode	Betekenis		Hoe ga je te werk?
0	Nog niet opgelost		1. Kies het juiste hoofdstuk in de tabbladen beneden
1	Opgelost - maar sterke twijfels		2. Voeg de opgave toe indien deze er nog niet staat; Merk op dat bij het copy-pasten bepaalden symbolen er niet deftig doorkomen --> kijk dus altijd naar de oorspronkelijke opgave
2	Opgelost - waarschijnlijk juist		3. Voeg je oplossing dan toe bij de juiste opgave (gebruik liefst LATEX bij tekens)
3	Opgelost - juist		4. Duidt aan in welke mate het antwoord "juist" is (toestand)
4	Opgelost én nagekeken door een assistent		
5	Ter controle gestuurd naar een assistent		

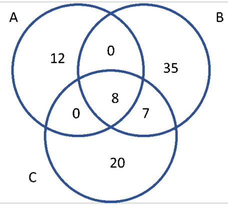
Hoofdstuk 8

<table>
<tr><th>Nummer</th><th>Opgave</th><th>Toestand</th><th>Oplossing</th><th>Opmerkingen</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>Zij A ⊤ (orde-symbool) B ⇔ |A| ≤ |B|. Bewijs dat ⊤ (orde-symbool) een quasi-orde is. (M.a.w., ≤ definieert een quasi-orde over alle verzamelingen.)</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Bart heeft 3 knikkers. Mieke heeft 5 knikkers. Als ze hun knikkers samenleggen, hoeveel knikkers hebben ze dan?</td><td>3</td><td>Stel A = {flikkers van Bart} en B = {knikkers van Mieke}. Ze hebben geen knikkers gemeenschappelijk. Volgens stelling 8.1 geldt dan dat de kardinaliteit van de unie van A en B gelijk is aan de som van de kardinaliteiten van de verzamelingen apart, mits de verzamelingen disjunct zijn. In dit geval is de kardinaliteit van A = 3 en van B = 5, dus de kardinaliteit van de unie van hun knikkers = 3 + 5 = 8.</td><td>that typo lol | "typo"</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Het laatste deel van het bovenstaande bewijs (na “als we dat allemaal samenbrengen . . . ”) gebruikt herhaaldelijk substitutie. Onderlijn in elke lijn van de keten gelijkheden het deel van de formule dat gesubstitueerd wordt.</td><td>3</td><td>$|A \cup B| = \underline{|A \cap B| + |A \setminus B|} + |B \setminus A|$
$= |A| + \underline{|B \setminus A|}$
$= |A| + |B| - |A \cap B|$</td><td>\left|A\cup B\right|= \left|A\cap B\right|+\left|A\setminus B\right| +\ \left|B\setminus A\right| =\left|A\right|+ \left|B\setminusA\right| =\left|A\right|+\left|B\right|-\left|A\cap B\right|</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Een weinig populaire richting aan de universiteit telt maar 2 studenten, Ann en Peter. Ann moet deze zittijd examen afleggen van 3 vakken, en Peter moet examen afleggen van 4 vakken. Er zijn 2 vakken waarvan ze beide examen moeten afleggen. Van hoeveel vakken in totaal moet er een examen ingericht worden?</td><td>3</td><td>Stel A = {examens Ann} en P = {examens Peter}. Er zijn twee vakken waarvan ze beide examen moeten afleggen, dus de twee verzamelingen zijn niet disjunct. Volgens stelling 8.2 geldt dan dat de kardinaliteit van de unie van alle examens gelijk is aan de som van de kardinaliteit van de beide verzamelingen apart, verminderd met de kardinaliteit van hun doorsnede. In dit geval is |A| = 3, |P| = 4 en |conjunctie| = 2. Hieruit volgt dan 3 + 4 - 2 = 5.</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Schrijf naast elke stap in het voorgaande bewijs de regel die toegepast wordt, en geef aan op welke deeluitdrukking die regel toegepast is.</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Een vogelhok in een dierentuin bevat 10 vogels die kunnen vliegen, 12 vogels die kunnen zingen, en 15 vogels met felgekleurde veren. 5 vogels kunnen zowel vliegen als zingen. Van de felgekleurde vogels kunnen er in totaal 9 vliegen en 8 zingen. 5 vogels kunnen zingen en vliegen en zijn felgekleurd. Hoeveel vogels zitten er in totaal in dit hok?</td><td>3</td><td>1+0+4+4+5+3+3=20 (gebruik makend van Venn-diagrammen)

Vliegen = V, Zingen = Z, Felgekleurd = K

|V| = 10, |Z| = 12, |K| = 15, |V ∩ Z| = 5, |K ∩ V| = 9, |K ∩ Z| = 8, |V ∩ Z ∩ K| = 5

|V ∪ Z ∪ K| = |V| + |Z| + |K| − |V ∩ Z| − |V ∩ K| − |Z ∩ K| + |V ∩ Z ∩ K|
= 10 + 12 + 15 - 5 - 9 - 8 + 5 = 20</td><td>
</td><td>Stel:
V=\{vogels\ die\ kunnen\ zingen\},
Z=\{vogels\ die\ kunnen\ vliegen\} en
K=\{vogels\ die\ felgekleurde\ veren\ hebben\}.
\left|V\right|=15,\left|Z\right|=12,\left|K\right|=15,
\left|V\cap Z\right|=5,\left|V\cap K\right|=9,
\left|Z\cap K\right| en\ \left|V\cap Z\cap K\right|=5
Gebruikmakend van de stelling 8.3, kan het volgende worden opgesteld:
\left|V\cup Z\cup K\right|
=\left|V\right|+\left|Z\right|+\left|K\right|-\left|V\cap Z\right|-\left|V\cap K\right|-\left|Z\cap K\right|+\left|V\cap Z\cap K\right|
=10+12+15-5-9-8+5
=20
Er zijn dus in totaal 20 vogels in het vogelhok.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>7</td><td>Een bepaalde opleiding organiseert in de augustuszittijd examens voor drie vakken. Voor vak A zijn er 20 studenten ingeschreven, voor vak B 50, voor vak C 35. 8 studenten moeten alle drie de vakken afleggen. 12 studenten hoeven enkel vak A af te leggen, 20 studenten enkel vak C. Hoeveel studenten moeten enkel vak B afleggen? Hint: gebruik een Venn-diagram.</td><td>3</td><td>Gegeven:
\left|A\right|=20,\left|B\right|=50,\left|C\right|=35,\left|A\capB\capC\right|=8,\left|A\right|-\left|B\cup C\right|=12 en \left|C\right|-\left|A\cup B\right|=20
Gebruikmakend van venndiagram kan er stapsgewijs informatie worden aangevuld en dan bekomt men dat er in totaal 35 studenten zijn die enkel vak B moeten volgen.</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>(uitdaging) Zij a een rij van n elementen a[i], waarbij elke a[i] een object van type Verzameling is. Zij gegeven een methode doorsnede(Verzameling, Verzameling) die de doorsnede van 2 verzamelingen teruggeeft, en een methode kard(Verzameling) die het aantal elementen van een verzameling teruggeeft. Definieer een methode die het aantal elementen in de unie van alle a[i] uitrekent via het inclusie-exclusie-principe.</td><td>0</td><td></td><td>Iemand enig idee?</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Bewijs de voorgaande stelling. Hint: gebruik inductie op k.</td><td>4</td><td><u>Basisstap</u>: $k = 2$
$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$ (gegeven)
<u>Inductiestap</u>: $k \Rightarrow k+1$
Hypothese: $|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k|$ stel $B = |A_1 \times \ldots \times A_k|$
Bewijs: $|A_1 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}| = |B \times A_{k+1}|$
$= |B| \cdot |A_{k+1}|$
$= |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| \cdot |A_{k+1}|$</td><td>Basisstap: k=2
\left|A_1\times A_2\right|=\left|A_1\right|\cdot\left|A_2\right|(gegeven)
Inductiestap: k\Rightarrow k+1
Hypothese:\left|A_1\times\ldots\ \times A_k\right|=\left|A_1\right|\cdot\ldots\cdot\left|A_k\right|stel B=\left|A_1\times\ldots\ \times A_k\right|
Bewijs:\left|A_1\times\ldots\times A_k\times A_{k+1}\right|\ \ =\left|B\times A_{k+1}\right|
=\left|B\right|\cdot\left|A_{k+1}\right|

=\left|A_1\right|\cdot\ldots\cdot\left|A_k\right|\cdot\left|A_{k+1}\right|</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Een spel kaarten bevat kaarten in vier “kleuren” (klaveren, schoppen, harten en ruiten) en 13 rangen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, D, H). Als elke rang in elke kleur bestaat, hoeveel kaarten zijn er in totaal?</td><td>3</td><td>|kleuren| * |rangen| = 4*13 = 52
Er zijn dus 52 kaarten in totaal.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>Een nummerplaat bevat eerst 3 letters, dan 3 cijfers. Hoeveel verschillende nummerplaten kunnen er gevormd worden?</td><td>3</td><td>26*26*26*10*10*10=17.576.000
Hangt er natuurlijk van af wat "geldige" nummerplaten zijn</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>Bij hexadecimale notatie van getallen worden 16 cijfers gebruikt (0-9 en A-F). Hoeveel verschillende getallen kunnen er met 4 hexadecimale cijfers voorgesteld worden? (ga ervan uit dat een getal met het cijfer 0 mag beginnen, dus 0000, 0001, etc. tellen ook mee.)</td><td>3</td><td>16*16*16*16=65.536</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>In een groep van 10 mannen en 8 vrouwen zijn er gisteren twee mensen getrouwd, maar je weet niet welke. Hoeveel mogelijke antwoorden zijn er op de vraag wie gisteren met wie getrouwd is,
• als je weet dat het een hetero-huwelijk is?
• als je weet dat het een homo-huwelijk is (twee mannen of twee vrouwen)?</td><td>3</td><td>a) 10*8=80
b) 10*9+8*7=146 --> delen door twee, want A met B en B met A is hetzelfde --> dus 73</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Een alternatief bewijs berust op de volgende redenering. Beschouw een willekeurige verzameling A met |A| = n. Definieer een bijectie tussen P(A) en {0, 1} n. Aangezien wegens Gevolg 8.1 |{0, 1} n| = 2n, geldt dan ook P(A) = 2n.</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>Wat is de kardinaliteit van de verzameling functies van A naar B? Merk op dat, als f een functie is, er voor elke x ∈ A een bijkomende mogelijkheid is voor f(x): f(x) kan gelijk zijn aan een van de elementen van B, of f(x) kan ongedefinieerd zijn.</td><td>4</td><td>(|B|+1)^{|A|}
Hier baseren we ons op het feit dat een afbeelding als kardinaliteit |B|^{|A|}. Nu komt er één extra optie bij (naar niets) waar A naartoe kan verwijzen. Daarom is het nodig om |B|+1 te nemen.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>10 studenten mogen uit 5 mogelijke vakken 1 keuzevak kiezen. Hoeveel verschillende keuzes kan de groep studenten als geheel maken? (Twee keuzes wordt als verschillend beschouwd als er minstens 1 student een ander vak gekozen heeft).</td><td>3</td><td>5^10</td><td>Hulpmiddel: (aantal keuzes)^{(aantal personen)}</td><td></td></tr>
</table>

17	10 studenten mogen uit 5 mogelijke vakken 2 keuzevakken kiezen. Hoeveel verschillende keuzes kan elke student maken? Hoeveel verschillende keuzes kan de groep studenten als geheel maken?	3	(5*4/2)^10 = 10^10		
18	5 kinderen staan in de rij voor de botsauto's op de kermis. Er zijn 10 botsauto's. Als je ervan uitgaat dat elk kind in een apart botsautootje kiest, op hoeveel verschillende manieren kunnen de kinderen plaatsnemen?	3	10*9*8*7*6 = 30.240 = 10!/5!		
19	Er staan 5 mensen en 5 auto's buiten. Elke auto hoort toe aan 1 persoon. Als je kunt raden welke auto van wie is, win je een prijs. Hoeveel mogelijkheden zijn er om uit te kiezen?	3	5! = 120		
20	5 vrienden houden een fietswedstrijd. In hoeveel verschillende volgordes kunnen ze aankomen bij de eindstreep?	3	5! = 120		
21	Op hoeveel verschillende manieren kunnen de vier Daltonbroers van links naar rechts op een rij gezet worden?	3	4! = 24		
22	In een loterij mag je 6 getallen aankruisen op een formulier met 45 getallen. Het maakt niet uit in welke volgorde de kruisjes gezet worden. Op hoeveel verschillende manieren kan je het formulier invullen?	3	45!/(6!*39!) = 8.145.060		
23	Vergelijk de manier waarop de breuken opgelijst worden met de manier waarop buspassagiers opgelijst worden in het Hilbert-hotel. Welke situatie bij het Hilbert-hotel komt hiermee overeen?	3	Oneindig veel bussen		
24	Zij A een eindige verzameling. De verzameling van alle eindig lange rijen van elementen van A (ook wel strings over A genoemd) heeft kardinaliteit $\aleph_0$. Bewijs dit door een manier voor te stellen om alle dergelijke rijen op te sommen.	3	Je kan iedere mogelijke unieke rij bekomen door ieder element van A minstens 1 keer te gebruiken op iedere 'plaats' binnen de rij. Wanneer je al je mogelijke combinaties hebt uitgeprobeerd, voeg je gewoon 1 nieuwe plaats toe aan de volgende rij. Beeld je in dat A het alfabet en alle leestekens bevat, dan is de verzameling van alle rijen {a,b,c,..,aa, ab,ac,...}. Stel dat we als A de waardes van een bit nemen, dan is de verzameling van alle rijen {0,1,00,01,10,11,000,001,...}. Voor de rest van de oefening beschouwen we A als het singleton {1}. Maak voor ieder getal n uit N een nieuwe rij aan met n keer het getal 1 in. A is eindig want het bevat enkel het getal 1, iedere rij is eindig want ieder getal in N op zich heeft een vaste waarde (al zij het 100 of 100.000.000.000 het getal zelf is nooit 'oneindig') en dus zit er een eindig aantal elementen in iedere rij. Er zijn wel evenveel van deze rijen te maken als er getallen zijn in N, namelijk $\aleph_0$.		
25	Een functie f van N naar N kan gedefinieerd worden als een oneindige rij getallen ai, i = 1, 2, 3, . . ., waarbij ai = f(i − 1). Toon aan dat het onmogelijk is om alle functies op te lijsten. M.a.w.: de verzameling functies van N naar N is onaftelbaar.	3	We kunnen dit bewijzen dmv het diagonaalargument van Cantor. We verzinnen een verzameling functies 'fn' van i ϵ N naar ai ϵ N. We zeggen dat ai ϵ fn de waarde n + (i - 1) heeft. Het is duidelijk dat er in deze verzameling functies evenveel functies 'fn' zitten als er getallen in N zitten, namelijk $\aleph_0$. Het is ook duidelijk dat iedere functie op zich een verzameling is van $\aleph_0$ elementen 'ai'. Als nu een functie f' maken door het eerste element uit f1, het 2e element uit f2,etc. te nemen, bekomen we een nieuwe functie die aan geen enkele functie fn gelijk is en dus niet binnen de huidige $\aleph_0$ grote verzameling fn ligt. Deze nieuwe functie is geen speciale functie, we kunnen er oneindig veel nieuwe bedenken op deze manier, we kunnen bijvoorbeeld een functie maken die start met het eerste element van f2 en zo diagonaal verder gaat (de diagonaal 1tje naar beneden verschuiven), of we kunnen de diagonaal sneller doen dalen door het eerste element van f1, het 2e element van f3 enz. te nemen. Dit wil zeggen dat er meer dan $\aleph_0$ functies zijn => onaftelbaar.	ai ϵ fn = n + (i - 1) a1 a2 a3 ... f1 1 2 3 f1 = { 1,2,3,...} f2 2 3 4 f2 = { 2,3,4,...} f3 3 4 5 f3 = { 3,4,5,...} ... f' = {1,3,5,...}	
26	Een computerprogramma is steeds een eindige rij tekens uit een eindig alfabet. Toon aan dat de verzameling van alle computerprogramma's aftelbaar oneindig is. Uit de beide laatste oefeningen volgt de volgende conclusie: er bestaan "meer" functies dan er programma's bestaan; bijgevolg bestaan er functies waarvan het resultaat niet door een programma uitgerekend kan worden.	3	Ieder programma is te herleiden naar bits. Een programma is dus een eindige rij van elementen uit een eindige verzameling {0,1}. We kunnen $\aleph_0$ verschillende programma's maken, zie oefening 8.24. Aangezien het aantal programma's dus 'aftelbaar' is en we in de vorige oefening aantoonden dat het aantal functies 'overaftelbaar' (of 'onaftelbaar') is, kunnen we besluiten dat we niet iedere functie kunnen programmeren.		

27	Interpreteer de bovenstaande rekenregels in de context van het Hilbert-hotel. Voor elke n\in\mathbb{N} geldt: n+\aleph_0=\aleph_0+n=\aleph_0. Voor elke\ n\in\mathbb{N}_0 geldt: n\cdot\aleph_0=\aleph_0\cdot n=\aleph_0. Voor elke n\in\mathbb{N}_0 geldt: \aleph_0^n=\aleph_0. Voor elke n\in\mathbb{N} met n\ >\ 1 geldt: n^{\aleph_0} \geq\aleph_0. Het aantal deelverzamelingen van\ \mathbb{N} is 2^ {\aleph_0}>\aleph_0. Het aantal functies van \mathbb{N} naar \mathbb{N} is {\aleph_0}^{\aleph_0}>\aleph_0.	1	a) Nog meer toeristen maar nog altijd telbaar oneindig b) Een oneindige bus erbij maar nog altijd telbaar oneindig c) Oneindig veel oneindige bussen, wel telbaar oneindig d) ?? ik geef op, soms telbaar oneindig (??) e) ? f) ?		
28	Aan een paardenkoers doen 10 paarden mee. Je mag een gokje wagen over de top 3. Hoeveel mogelijke uitkomsten voor de top 3 zijn er • als de volgorde uitmaakt? • als de volgorde niet uitmaakt?	3	a) 10!/7! = 10*9*8 = 720 b) 10!/(7!3!) = 120		
29	In een doos zitten 5 witte ballen (we noemen ze bal 1, 2, 3, 4, 5) en 6 zwarte ballen (die we a, b, c, d, e, f noemen). Bij een "trekking" neem je willekeurig een aantal ballen uit de doos; de "uitkomst" is een deelverzameling van de ballen in de doos (we gaan er dus van uit dat de volgorde waarin je ze neemt niet uitmaakt); bv. een mogelijke uitkomst, als je 4 ballen trekt, is {a,e,1,3}.	3	a) 165 b) 6 c) 10 d) 60		