

Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Samenvatting

Robin Kelchtermans

17 februari 2018

Voorwoord

In deze samenvatting komen alle onderdelen van de cursus Bewijzen en Redeneren voor Informatici (academiejaar 2017-2018) aan bod uit de opleiding Informatica aan de KU Leuven.

Merk op dat hier zeker nog een paar fouten in staan en dat sommige onderdelen heel kort worden aangehaald.

Taalpuristen, grammarnazis en andere die een beetje belang hechten aan een onze Nederlandse taal, sorry. Dit document werd snel geschreven en nooit nagelezen op taalfouten e.d.

Deze samenvatting is ook meer gemaakt als leermiddel voor mezelf en kan dus soms wat onduidelijk zijn. Dus indien iets niet duidelijk is kan je steeds terug naar de cursus kijken. De nummering uit de cursus wordt behouden in deze samenvatting.

Er worden weinig voorbeelden aangehaald, maar kunnen zeer nuttig zijn om bepaalde concepten te snappen. Ga dan even naar de cursustekst kijken.

Dit document is dus een samenvatting en het is sterk aangeraden om eerst de volledige cursustekst door te nemen voor dit document te bekijken. Ik ben niet verantwoordelijk voor eventuele buizen, hysterisch wenen en ongewenste zwangerschappen.

De oefeningen die hier staan zijn aan de beperkte kant. Het neemt gigantisch veel tijd om dat digitaal op te schrijven, maar er bestaat een document op de Wina wiki die de oplossingen bevat. Merk wel op dat de oplossingen door mij of andere studenten werden opgesteld. Dus sorry voor de fouten.

Onderschat dit vak ook niet, het examen leek niet zo moeilijk, maar mijn punten waren wel lager dan verwacht.

Indien je het originele document wilt (in Word, sorry), mail mij dan op robin.kelchtermans@gmail.com.

Inhoudstafel

Voorwoord.....	2
1. Verzamelingen	7
1.1. Verzameling	7
1.1.1. Opsomming.....	7
1.1.2. Omschrijving	7
1.1.3. Venndiagrammen.....	7
1.1.4. Formele Notatie	8
1.2. Enkele Speciale Gevallen van Verzamelingen	8
1.2.1. Lege Verzameling ($\emptyset$)	8
1.2.2. Singletons en Paren.....	8
1.2.3. Oneindige Verzamelingen	8
1.2.4. Bijzondere Verzamelingen.....	9
1.3. Deelverzameling.....	9
1.4. Operaties op Verzamelingen	9
1.4.1. Doorsnede.....	9
1.4.2. Unie of Vereniging.....	10
1.4.3. Verschil.....	10
1.4.4. Symmetrisch Verschil	10
1.4.5. Complement.....	10
1.4.6. Venndiagrammen.....	11
1.4.7. Notatie: Samenvatting	11
1.5. Complexe Uitdrukkingen	11
1.6. Enkele Rekenregels	12
1.6.1. Complement.....	12
1.6.2. Unie en Doorsnede.....	12
1.6.3. Unie van Meerdere Verzamelingen.....	12
1.6.4. Doorsnede van Meerdere Verzamelingen.....	13
1.6.5. Unie en Doorsnede van Oneindig Veel Verzamelingen	13
1.6.6. Verschil.....	13
1.6.7. Distributiviteit van Unie en Doorsnede	13
1.6.8. De Wetten van De Morgan.....	14
1.6.9. Meerdere Keren Dezelfde Verzameling	14
1.6.10. Andere Eigenschappen.....	14
1.7. Verzamelingen van Verzamelingen	14
1.7.1. Machtsverzameling	14
2. Precieze Uitspraken Formuleren	15
2.1. Precieze en Minder Precieze Uitspraken.....	15
2.2. Beweringen	15
2.3. Conjunctie	15
2.4. Disjunctie	15
2.5. Ontkenning	16
2.6. Implicatie	16
2.7. Equivalentie	16
2.8. Complexe Beweringen	17
2.9. Waarheidstabellen	17
2.10. Kwantificatie	17

2.10.1.	Alle Elementen	17
2.10.2.	Sommige Elementen	18
2.10.3.	Precies één Element.....	18
2.10.4.	Geen Enkel Element	18
2.10.5.	Meerdere Kwantificaties	18
2.11.	Geparametriseerde Beweringen	18
2.12.	Naamgeving	18
2.13.	Samenvatting Notatie	19
2.14.	Logische Rekenregels	19
3.	Opbouw van Theorieën.....	20
3.1.	Definities	20
3.2.	Naamgeving en Notatie.....	20
3.3.	Eigenschappen	20
3.4.	Axioma's.....	20
3.5.	Bewijzen	21
3.6.	Stellingen	21
3.7.	Nummering en Naamgeving	21
3.8.	Toepassing: Verzamelingenleer	22
3.9.	Toepassing: Kansrekening	22
4.	Bewijstechnieken	23
4.1.	Bewijzen over Algoritmen	23
4.2.	Bewijzen over Problemen	23
4.3.	Bewijs via Substitutie	23
4.4.	Ketens van (On)gelijkheden, Implicaties en Equivalenties	24
4.5.	Wederzijdse Implicatie.....	25
4.6.	Inclusie en Gelijkheid van Verzamelingen	25
4.7.	Modus Ponens	25
4.8.	Herhaalde Gevolgtrekking.....	25
4.9.	Bewijs door Constructie	25
4.10.	Gevalsonderscheiding	26
4.11.	Implicaties Bewijzen.....	26
4.12.	Bewijs uit het Ongerijmde.....	26
4.13.	Bewijs door Inductie	26
4.13.1.	Varianten van Bewijzen door Inductie	27
4.13.2.	Valstrikken.....	27
4.14.	Redeneren met Ontkenningen.....	27
4.15.	Bewijs door Vaststelling	27
4.16.	Bewijs door Tekening	27
4.17.	Wanneer Welke Methode Gebruiken?	28
4.18.	Correctheidsbewijzen van Algoritmen	28
4.18.1.	Voorbeeld: Algoritme van Euclides	29
4.18.2.	Enkele Algemene Principes	29
4.18.3.	Voorbeeld: Zoeken in een Geordende Rij.....	29
5.	Relaties	30
5.1.	Koppels en Tupels	30
5.2.	Cartesisch Product van Twee Verzamelingen	30
5.3.	Relaties.....	30
5.3.1.	Relatie	30

5.3.2.	Grafische Voorstelling	31
5.4.	Inverse Relatie.....	31
5.5.	Samengestelde Relatie	31
5.6.	Toepassing: Databanken	32
6.	Functies.....	33
6.1.	Functies	33
6.2.	Afbeeldingen en Bijecties	33
6.3.	Functies met Meerdere Argumenten	34
6.4.	Operatoren op Functies	34
7.	Equivalente en Orderrelaties.....	36
7.1.	Binaire Relaties over Dezelfde Verzameling	36
7.1.1.	Reflexiviteit	36
7.1.2.	Symmetrie	36
7.1.3.	Transitiviteit	38
7.2.	Equivalentierelaties.....	38
7.3.	Orderrelaties	39
7.3.1.	Partiële en Totale Ordes	39
7.3.2.	Boven- en Ondergrenzen	39
7.3.3.	Tralies.....	40
7.4.	Quasi-orde.....	40
7.5.	Toepassing: Efficiënt Zoeken in Zoekruimten.....	40
8.	Kardinaliteit	41
8.1.	Kardinaliteit van een Verzameling	41
8.2.	Telproblemen.....	41
8.2.1.	Kardinaliteit van de Unie	41
8.2.2.	Kardinaliteit van het Cartesisch Product	42
8.2.3.	Kardinaliteit van de Machtsverzameling	42
8.2.4.	Aantal Afbeeldingen van A naar B	42
8.2.5.	Aantal Injecties van A naar B	42
8.2.6.	Aantal Bijecties tussen A en B	42
8.2.7.	Aantal Volgordes waarin de Elementen van een Verzameling Opgelijst Kunnen Worden	42
8.2.8.	Aantal Deelverzamelingen van grootte m van een Verzameling met Kardinaliteit n ..	43
8.2.9.	Toepassing: complexiteit van sorteeralgoritmen	43
8.3.	Kardinaliteit van een Oneindige Verzamelingen	43
8.3.1.	Kardinaliteit van $\mathbb{N}$	43
8.3.2.	Kardinaliteit van $\mathbb{Z}$	43
8.3.3.	Kardinaliteit van $\mathbb{Q}$	43
8.3.4.	Kardinaliteit van $\mathbb{R}$	43
8.3.5.	Rekenen met Oneindige Kardinaalgetallen	44
9.	Structuren	45
Oefeningen		46
Hoofdstuk 1		47
Hoofdstuk 2		49
Hoofdstuk 3		50
Hoofdstuk 4		51
Hoofdstuk 5		52
Hoofdstuk 6		53

Hoofdstuk 7	54
Hoofdstuk 8	55

1. Verzamelingen

1.1. Verzameling

Een **verzameling** is een object dat een groep individuen als geheel aanduidt. De individuen die deel uitmaken van een verzameling, worden de **elementen** van die verzameling genoemd. We zeggen ook dat ze **lid** zijn van die verzameling, en dat de verzameling die individuen bevat.

Eigenschappen van een verzameling:

- Maximaal één keer lid
- Geen vaste volgorde
- Zelfde elementen in twee verzamelingen → gelijk verzamelingen (de identiteit van een verzameling wordt volledig bepaald door de elementen die erin zitten)

Welke elementen zitten er in een verzameling? Opsomming, omschrijving en venndiagrammen.

1.1.1. Opsomming

Opsommen van **termen** (leden/elementen), gescheiden door een **komma** en tussen **accolades**:

- {Eddy Merckx, Briek Schotte, Tom Boonen}
- {1,2,3,4,5}

Elementen laten wegvallen met **drie puntjes**:

- {1, 2, 3, 4, ..., 99, 100}
- {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} → Oneindige opsomming

1.1.2. Omschrijving

Omschrijven van de elementen van een verzameling gebaseerd op de eigenschappen van de elementen. **Alle individuen** die voldoen aan de eigenschappen zijn lid van de verzameling.

- De verzameling getallen tussen 1 en 100.
- De verzameling bekende Belgische wielrenners.

→ Omschrijving is wat onduidelijk.

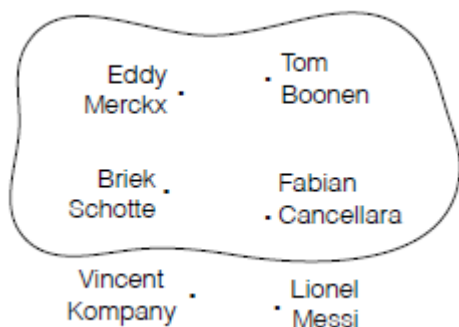
→ **Omschrijving moet zo precies mogelijk zijn.** Dus:

- {x | x is een geheel getal tussen 1 en 100}

X is een **variabele**.

1.1.3. Venndiagrammen

Schematisch voorstellen a.d.h.v. venndiagrammen:



1.1.4. Formele Notatie

Verzamelingen krijgen een **naam** en starten met een **hoofdletter**. Een element van de verzameling wordt dan vaak aangeduid met een variabele (meestal x of y).

Notatie	Uitspraak
$x \in A$	x is een element van A x zit in A x komt voor in A A bevat x
$x \notin A$	x is geen element van A x zit niet in A x komt niet voor in A A bevat x niet
$x, y, z \in A$	x , y en z zijn elementen van A
$x, y, z \notin A$	A bevat noch x , noch y , noch z

1.2. Enkele Speciale Gevallen van Verzamelingen

1.2.1. Lege Verzameling ($\emptyset$)

Indien een verzameling **geen elementen** heeft, dan wordt deze de lege verzameling genoemd met het symbool: $\emptyset$

1.2.2. Singletons en Paren

Singleton = verzameling met **één element**.

Paar = verzameling met **twee elementen**.

Opletten:

- 3 Is een getal
- {3} Is een verzameling (singleton)

1.2.3. Oneindige Verzamelingen

= Verzameling met oneindig aantal elementen. Voorbeeld: Alle natuurlijke getallen.

1.2.4. Bijzondere Verzamelingen

Veelgebruikte verzamelingen krijgen een **speciale naam en/of symbool**.

- Natuurlijke getallen $\mathbb{N}$
- Gehele getallen $\mathbb{Z}$
- Rationale getallen $\mathbb{Q}$
- Reële getallen $\mathbb{R}$
- Waar/onwaar $\mathbb{B}$

Een verzameling kan aangeduid worden a.d.h.v. **intervallen**:

- $[a, b]$ Gesloten interval
- $[a, b[$ Halfopen interval
- $]a, b]$ Halfopen interval
- $]a, b[$ Open interval

$+\infty$ en $-\infty$ worden steeds met een (half)open interval genoteerd:

- $[a, +\infty[$

1.3. Deelverzameling

Definitie 1.1: Een verzameling A is een **deelverzameling** van een verzameling B als en slechts als elk element van A ook voorkomt in B.

Als A en B **niet gelijk** zijn, dan zeggen we dat A een **strikte deelverzameling** van B is.

Notatie	Uitspraak
$A = B$	A is gelijk aan B
$A \neq B$	A is niet gelijk aan B A verschilt van B
$A \subseteq B$	A is een deelverzameling van B
$A \not\subseteq B$	A is geen deelverzameling van B
$A \subset B$	A is een strikte deelverzameling van B
$A \not\subset B$	A is geen strikte deelverzameling van B

De **lege verzameling** is altijd een **deelverzameling** van een andere verzameling!

1.4. Operaties op Verzamelingen

1.4.1. Doorsnede

De **doorsnede** van A en B is de verzameling die alle elementen bevat die zowel in A als in B zitten, en geen andere. Met andere woorden, het is de verzameling $\{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$$

- Als $A = \{1,2,3,4,5\}$ en $B = \{3,4,5,6,7\}$ is $A \cap B = \{3,4,5\}$

Als de doorsnede leeg is, dan zijn de verzamelingen **disjunct**.

1.4.2. Unie of Vereniging

De **unie** of **vereniging** van twee verzamelingen A en B is de verzameling die alle elementen van A bevat, alle elementen van B, en geen andere.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ en/of } x \in B\}$$

- Als $A = \{1,2,3,4,5\}$ en $B = \{3,4,5,6,7\}$ is $A \cap B = \{3,4,5\}$

1.4.3. Verschil

Het **verschil** van twee verzamelingen A en B, is de verzameling van alle elementen van A die niet in B voorkomen. A “min” B of A “zonder” B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$$

Opgepast (in de meeste gevallen):

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

1.4.4. Symmetrisch Verschil

Het **symmetrisch verschil** van twee verzamelingen A en B is de verzameling van alle elementen die in de ene verzameling maar niet in de andere voorkomen. Deze verzameling bevat dus alle elementen in $A \setminus B$, maar ook die in $B \setminus A$.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

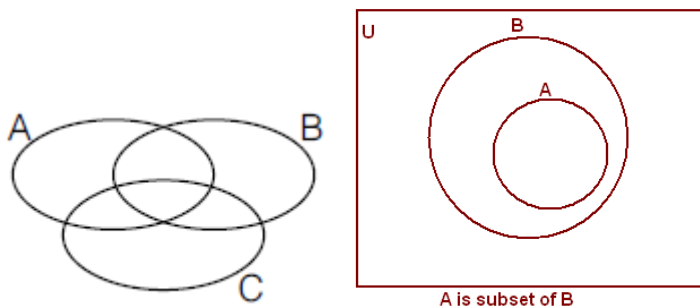
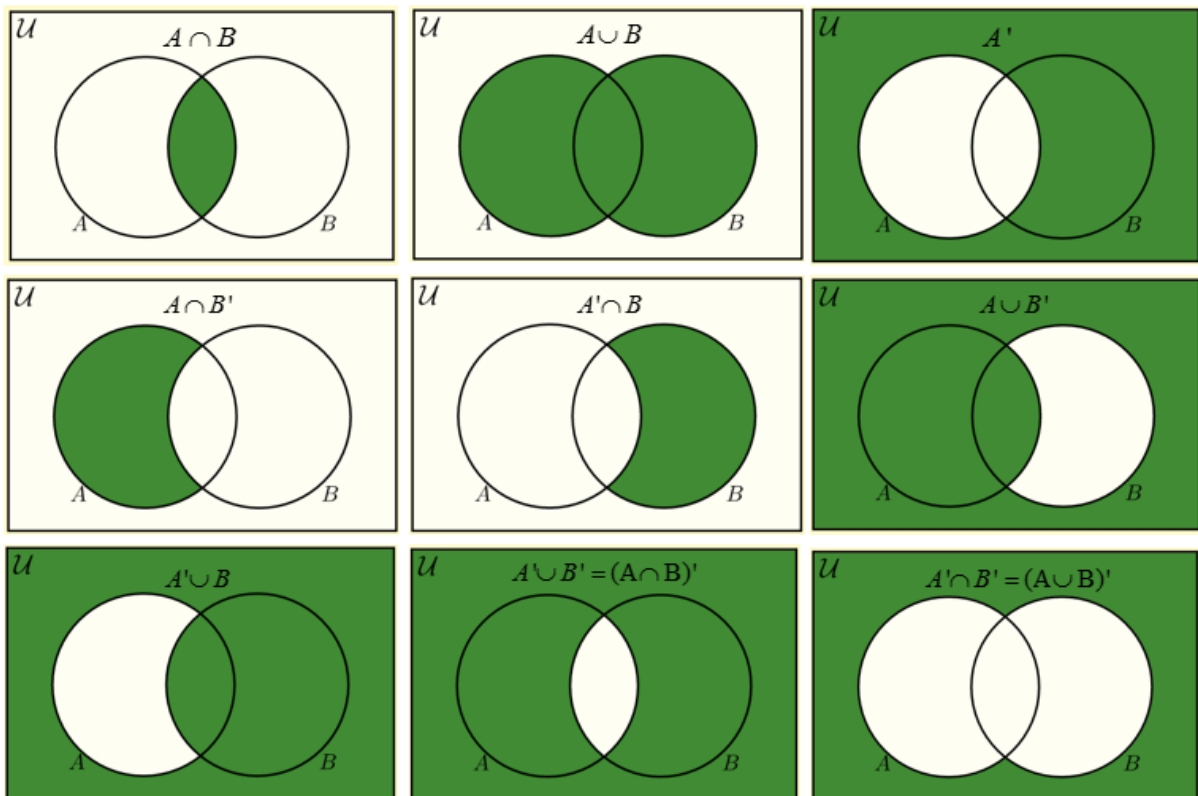
1.4.5. Complement

Het **complement** van een verzameling A, genoteerd A^c , is de verzameling van alle individuen die geen element zijn van A.

Aangezien het complement wat onduidelijk is, wordt deze vaak gebruikt binnen een **universum U**. U zal een context bepalen waarin A dan geldt.

Merk op dat: $A^c = U \setminus A$

1.4.6. Venndiagrammen



De rechthoek stelt het universum voor. ' voor complement.

1.4.7. Notatie: Samenvatting

Notatie	Uitspraak
$A \cup B$	de unie van A en B
$A \cap B$	de doorsnede van A en B
$A \setminus B$	A min B
$A \Delta B$	het symmetrisch verschil van A en B
A^c	het complement van A

1.5. Complexe Uitdrukkingen

Operaties op meer dan twee verzamelingen.

Volgorde van bewerkingen:

- Haakjes
- Complement-operator
- Doorsnede, unie, en (symmetrisch) verschil, van links naar rechts

Equivalent ($\Leftrightarrow$) = uitdrukkingen die hetzelfde resultaat geven.

Eenvoudiger maken van uitdrukkingen kan bepaalde computerprogramma's vele malen sneller maken.

1.6. Enkele Rekenregels

Geen zin om alles te lezen? De volgende tabel zou moeten volstaan:

doorsnede	unie
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
$A \cap B \subseteq A$	$A \subseteq A \cup B$
als $A \subseteq B$, dan $A \cap B = A$	als $A \subseteq B$, dan $A \cup B = B$
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
verschil	complement
$A \setminus A = \emptyset$	$U = \emptyset^c$
$A \setminus \emptyset = A$	$A \cup A^c = U$
$A \setminus B \subseteq A$	$A \cap A^c = \emptyset$
als $A \subseteq B$, dan $A \setminus B = \emptyset$	$A \setminus B = A \cap B^c$
$A \Delta B = B \Delta A$	$(A^c)^c = A$
gemengd	
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Tabel 1.1: Enkele rekenregels voor de verzamelingenleer

1.6.1. Complement

Als A het complement is van B, is B ook het complement van A.

$$A = B^c \Leftrightarrow B = A^c$$

1.6.2. Unie en Doorsnede

De unie en doorsnede zijn **commutatief**. Dat wil zeggen dat "de unie van A en B" hetzelfde betekent als "de unie van B en A".

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

1.6.3. Unie van Meerdere Verzamelingen

De unie is **associatief**.

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Een operator is associatief als het bij het herhaaldelijk uitvoeren van de operator niet uitmaakt welke deelresultaten eerst uitgerekend worden. Formeel zeggen we dat een operator $*$ associatief is als en slechts als voor alle x, y, z geldt: $(x * y) * z = x * (y * z)$. (Het symbool $*$ staat hier voor een willekeurige operator.)

1.6.4. Doorsnede van Meerdere Verzamelingen

De doorsnede is **associatief**.

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

1.6.5. Unie en Doorsnede van Oneindig Veel Verzamelingen

Notatie	Uitspraak
$\bigcup_{i=1}^n A_i$	de unie van alle A_i , voor i van 1 tot n
$\bigcap_{i=1}^n A_i$	de doorsnede van alle A_i , voor i van 1 tot n
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$	de unie van alle A_i , voor $i = 1, 2, 3, \dots$
$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	de doorsnede van alle A_i , voor $i = 1, 2, 3, \dots$
$\bigcup_{i \in I} A_i$	de unie van alle A_i , voor $i \in I$
$\bigcap_{i \in I} A_i$	de doorsnede van alle A_i , voor $i \in I$

Voorbeeld:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$$

1.6.6. Verschil

Het verschil is **niet commutatief** (in de meeste gevallen).

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

Het verschil wordt (zoals de rest) van links naar rechts genomen.

$$A \setminus B \setminus C = (A \setminus B) \setminus C$$

1.6.7. Distributiviteit van Unie en Doorsnede

Distributiviteit van $\cap$ over $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Distributiviteit van $\cup$ over $\cap$:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

1.6.8. De Wetten van De Morgan

Het complement van de unie is de doorsnede van de complementen:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Het complement van de doorsnede is de unie van de complementen:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

1.6.9. Meerdere Keren Dezelfde Verzameling

Indien er twee (of meer) keren dezelfde actie wordt gedaan, kan deze gereduceerd worden tot eenmaal die actie:

- $(A \cup B) \cup B = A \cup B$
- $(A \cap B) \cap B = A \cap B$
- $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$

1.6.10. Andere Eigenschappen

- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \cap B \subseteq B$
- als $A \subseteq B$, dan geldt $A \cup B = B$
- als $A \subseteq B$, dan geldt $A \cap B = A$
- als $A \subseteq B$, dan geldt $A \cap B^c = \emptyset$

1.7. Verzamelingen van Verzamelingen

Een verzameling kan als element een verzameling hebben.

Merk op dat er wel degelijk een verschil is met A is een deelverzameling van B !

1.7.1. Machtsverzameling

De **machtsverzameling** (Engels: *power set*) van een verzameling A , genoteerd $\mathcal{P}(A)$ (ook als 2^A geschreven), is de verzameling van alle deelverzamelingen van A .

Voorbeeld:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

2. Precieze Uitspraken Formuleren

2.1. Precieze en Minder Precieze Uitspraken

Aangezien het soms moeilijk is om iets in het Nederlands duidelijk uit te drukken, wordt er in de wiskunde gewerkt met symbolen. De betekenis van elk symbool wordt op voorhand vastgelegd.

2.2. Beweringen

Een **bewering** of **propositie** is een uitspraak die waar of onwaar kan zijn.

- Die fles is leeg. Hangt af van de situatie → niet precies genoeg
- Er zijn geen even priemgetallen. Onwaar

P en Q worden vaak gebruikt als algemene naam. Indien er symbolen worden gebruikt (vanaf volgend paragraaf), dan worden de uitdrukkingen **logische formules** genoemd.

2.3. Conjunctie

Zij P en Q twee beweringen. De **conjunctie** van de beweringen is een nieuwe bewering, die waar is als en slechts als beide beweringen waar zijn. De conjunctie wordt gewoonlijk met het woord “en” aangegeven.

$$P \wedge Q$$

We kunnen de betekenis van een conjunctie ook in tabelvorm weergeven. Daarbij geven we voor elke mogelijke combinatie van of P en Q waar zijn, aan wat $P \wedge Q$ is. We noemen zo'n overzichtstabel ook wel een **waarheidstabel**.

P	Q	$P \wedge Q$
waar	waar	waar
onwaar	waar	onwaar
waar	onwaar	onwaar
onwaar	onwaar	onwaar

2.4. Disjunctie

Zij P en Q twee beweringen. De **disjunctie** van de beweringen is een nieuwe bewering, die waar is als en slechts als minstens een van beide beweringen waar zijn. De disjunctie wordt gewoonlijk met het woord “of” aangegeven. → **Inclusieve of**

$$P \vee Q$$

P	Q	$P \vee Q$
waar	waar	waar
onwaar	waar	waar
waar	onwaar	waar
onwaar	onwaar	onwaar

De **exclusieve of** is niet gestandaardiseerd, maar zit er als volgt uit: $\oplus$

Als beiden waar zijn, dan wordt de exclusieve of onwaar.

2.5. Ontkenning

Zij P een bewering. De **ontkenning** van P is een nieuwe bewering die waar is als en slechts als P niet waar is. De ontkenning wordt heel vaak met het woord “niet” aangegeven.

$$\neg P$$

P	$\neg P$
waar	onwaar
onwaar	waar

2.6. Implicatie

Zij P en Q twee beweringen. De bewering “ P **impliceert** Q ” betekent zoveel als “als P waar is, is Q ook waar”. Merk op dat er geen enkele uitspraak gedaan wordt over de gevallen waarin P onwaar is. De bewering wordt alleen tegengesproken wanneer P waar is, en Q toch onwaar. Het feit dat P Q impliceert kan op veel verschillende manieren uitgedrukt worden:

- P impliceert Q
- als P geldt, dan geldt Q
- als P waar is, dan kan het niet anders dan dat Q ook waar is

$$P \Rightarrow Q$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
waar	waar	waar
waar	onwaar	onwaar
onwaar	waar	waar
onwaar	onwaar	waar

Modus ponens: Als P waar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan is Q waar.

Modus tollens: Als Q onwaar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan is P onwaar.

Hou rekening met het feit dat de implicatie soms intuïtief niet juist lijkt!

2.7. Equivalentie

Zij P en Q twee beweringen. De bewering “ P is **equivalent** met Q ” is waar als en slechts als het zo is dat, wanneer P waar is, Q ook waar is, en wanneer P niet waar is, ook Q niet waar; of nog: P en Q zijn steeds tegelijk waar of niet waar. De equivalentie kan op verschillende manieren uitgedrukt worden:

- P is equivalent met Q
- P geldt als en slechts als Q geldt

$$P \Leftrightarrow Q$$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
waar	waar	waar
waar	onwaar	onwaar
onwaar	waar	onwaar
onwaar	onwaar	waar

2.8. Complexe Beweringen

Volgorde van operatoren:

- Haakjes
- $\neg$
- $\wedge$
- $\vee$
- $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

2.9. Waarheidstabellen

Kan gebruikt worden voor eender welke samengestelde bewering.

Voorbeeld:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$
waar	waar	waar	waar
waar	onwaar	onwaar	onwaar
onwaar	waar	waar	onwaar
onwaar	onwaar	waar	onwaar

Bij het vergelijken van beweringen, kan er gevraagd worden of ze **logisch equivalent** zijn ($\equiv$). Dit wil zeggen: “is het eindresultaat in een waarheidstabel dezelfde?”. Voorbeeld:

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

Een **tautologie** is een formule waarvoor de waarheidstabel op elke lijn “waar” bevat.

Een **contradictie** is een formule die logisch equivalent is met “onwaar”.

2.10. Kwantificatie

2.10.1. Alle Elementen

Zij P een bewering die verwijst naar een zekere x . De zin “voor elke x in de verzameling S geldt P ” is dan ook een bewering. De variabele x in die bewering noemen we **universeel gekwantificeerd**. Universeel verwijst naar het feit dat P volgens deze bewering voor elke x in S geldt.

$$\forall x \in S : P$$

Wordt gelezen als: “voor alle x in S geldt: P ”.

Als het duidelijk genoeg is, mag het “element van S ”-gedeelte wegvallen.

2.10.2. Sommige Elementen

Soms willen we zeggen dat een bewering die naar x verwijst, niet per se voor alle x in S waar is, maar wel voor minstens één x . We drukken dat uit met de bewering “er bestaat een x in S , waarvoor P geldt”. In deze bewering is x **existentieel gekwantificeerd**.

$$\exists x \in S : P$$

2.10.3. Precies één Element

Als er precies één element moet bestaan in de verzameling waarvoor de bewering geldt:

$$\exists! x \in S : P$$

2.10.4. Geen Enkel Element

Als we tenslotte willen zeggen dat P voor geen enkele x in S waar is, kunnen we dat doen op verschillende manieren:

$$\nexists x \in S : P$$

$$\neg(\exists x \in S : P)$$

$$\forall x \in S : \neg P$$

→ Allemaal logisch equivalent!

2.10.5. Meerdere Kwantificaties

Symbolen als $\forall$ en $\exists$ worden kwantoren genoemd. $\forall$ is de universele kwantor, $\exists$ de existentiële. Deze kunnen ook gecombineerd worden.

- $\forall x, y \in S : \dots$
- $\forall x : \exists y : \dots$

2.11. Geparametriseerde Beweringen

Om aan te duiden dat de variabele x wordt toegepast op een bewering P , wordt $P(x)$ gebruikt.

2.12. Naamgeving

Geef elk object een naam.

2.13. Samenvatting Notatie

Notatie	Uitspraak
$P \wedge Q$	P en Q
$P \vee Q$	P of Q
$\neg P$	niet P
$P \Rightarrow Q$	P impliceert Q als P , dan Q
$P \Leftrightarrow Q$	P als en slechts als Q P is equivalent met Q
$\forall x \in S : P$	voor alle x in S geldt P
$\exists x \in S : P$	er bestaat een x in S waarvoor P geldt
$\exists! x \in S : P$	er bestaat precies één x in S waarvoor P geldt
$\nexists x \in S : P$	er bestaat geen x in S waarvoor P geldt

2.14. Logische Rekenregels

Tautologieën ($\equiv$ waar)	Contradicties ($\equiv$ onwaar)
$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
$P \Rightarrow P$	
$P \Leftrightarrow P$	
$P \wedge Q \Rightarrow P$	
$P \Rightarrow P \vee Q$	
Logische equivalenties	
$P \wedge P \equiv P$	
$P \vee P \equiv P$	
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$	
$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$	
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	
$\neg(\neg P) \equiv P$	
$P \wedge \text{waar} \equiv P$	
$P \vee \text{waar} \equiv \text{waar}$	
$P \wedge \text{onwaar} \equiv \text{onwaar}$	
$P \vee \text{onwaar} \equiv P$	
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	commutativiteit van $\wedge$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	commutativiteit van $\vee$
$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	associativiteit van $\wedge$
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	associativiteit van $\vee$
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	distributiviteit van $\wedge$ over $\vee$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	distributiviteit van $\vee$ over $\wedge$
$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$	De Morgan
$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$	De Morgan

Merk op de gelijkenis met de verzamelingenleer (zoals de wetten van De Morgan).

3. Opbouw van Theorieën

We willen een bepaald type problemen formeel kunnen beschrijven, een algoritme bedenken dat dat soort problemen oplost, en vervolgens bewijzen dat dat algoritme die problemen oplost.

3.1. Definities

Een **definitie** is een element van de theorie waarin we een nieuwe term, of een nieuw symbool, introduceren, en duidelijk maken wat de term betekent of waarvoor het symbool staat. Het belangrijkste is daarbij dat de definitie eenduidig is, dat er geen verwarring kan zijn over wat de betekenis van de nieuwe term of het nieuwe symbool is.

Een definitie kan in volzinnen of symbolen worden uitgedrukt.

Een definitie kan strikt genomen nooit fout zijn, maar of deze volledig bedoelt wat er bedoeld wordt is niet altijd het geval.

3.2. Naamgeving en Notatie

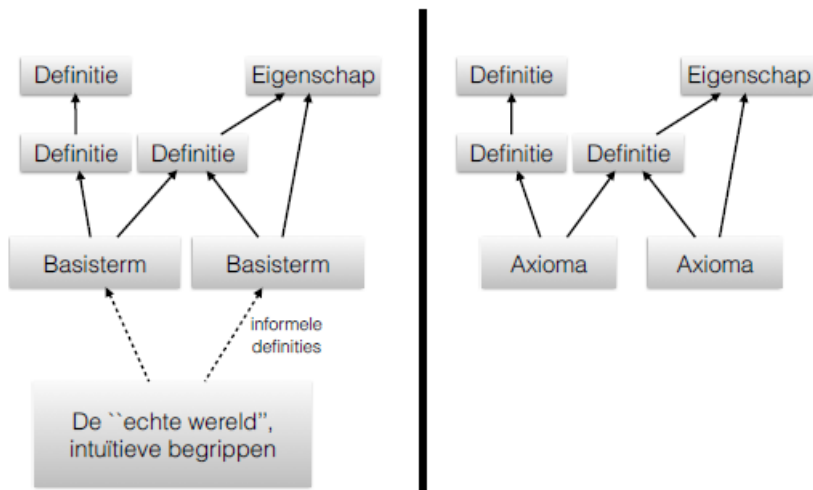
Er zijn **lokale** en **globale** namen. Verzameling A en B zijn lokaal, maar $\cap$ is dan weer globaal. Dit zijn afspraken rond **notatie**.

3.3. Eigenschappen

Een bewering die binnen een bepaalde theorie steeds waar is, wordt ook wel een **eigenschap** van die theorie genoemd. Deze is ofwel waar, ofwel onwaar.

3.4. Axioma's

Aan de basis van de theorie liggen steeds "**basisdefinities**", die niet op eerdere definities rusten, en dus noodzakelijkerwijs iets minder formeel zijn (we moeten "in gewone woorden" uitleggen wat we bedoelen). Vaak liggen aan de basis ook "**basiseigenschappen**", eigenschappen die niet bewijsbaar zijn uit de definities en ook niet uit eerdere eigenschappen, omdat we nu eenmaal ergens moeten beginnen. Een dergelijke basiseigenschap wordt een **axioma** genoemd.



3.5. Bewijzen

Een **bewijs** moet zo gedetailleerd zijn dat geen enkele lezer redelijkerwijze zou kunnen twijfelen aan de verschillende stappen die gezet worden.

Indien er enkel een paar *hints* worden gegeven, is dat een **schets van een bewijs**, maar geen echt bewijs.

3.6. Stellingen

Een stelling (Engels: *theorem*) is een belangrijke bewering waarvan vervolgens bewezen wordt dat ze waar is. Met “belangrijk” wordt hier bedoeld dat de stelling een belangrijk onderdeel van de theorie vormt, een deel dat waarde op zich heeft.

De belangrijkste stellingen krijgen soms ook een naam (stelling van Pythagoras). Dat is handiger om ernaar te refereren in een bewijs.

Een stelling bestaat typisch uit:

- Het gegeven: bekende zaken en die al bewezen zijn
- Het te bewijzen
- Het bewijs zelf

Soorten stellingen:

- **Vermoeden**: iets dat nooit bewezen is, maar waarschijnlijk waar is
- **Lemma**: hulpstelling, ze zijn de “bouwblokken” van een bewijs van een stelling
- **Corollary/gevolg/corollarium**: stelling waarvan het bewijs triviaal is

3.7. Nummering en Naamgeving

Nummer je stelling om ernaar te kunnen refereren.

3.8. Toepassing: Verzamelingenleer

Neem dit door in de cursustekst. Dit is een goed voorbeeld van hoe een theorie wordt opgebouwd.

Opmerkingen:

- **Compactheid, precisie, en intuïtiviteit:** Indien de lezer vertrouwd is met de leerstof kan alles heel compact, maar hou rekening met het feit dat dat niet altijd zo is.
- **Alternatieven:** er bestaan vaak alternatieve bewijzen, die voor een bepaalde lezer intuïtiever lijkt dan de andere.
- **Correctheid en volledigheid:** het is moeilijk om echt alles helemaal correct en volledig te hebben. Zie voorbeeld in cursustekst.

3.9. Toepassing: Kansrekening

Neem dit door in de cursustekst. Dit is een goed voorbeeld van hoe een theorie wordt opgebouwd.

4. Bewijstechnieken

In dit hoofdstuk is het best wel handig om de cursus te gebruiken i.p.v. deze samenvatting. De cursus bevat heel wat voorbeelden van elke techniek, maar deze worden hier niet aangehaald (letterlijke copy-paste). Dus als je dit hoofdstuk voor de eerste keer doorneemt is het best dat je naar de cursus kijkt en vervolgens hier een samenvattend gedeelte hebt.

4.1. Bewijzen over Algoritmen

We moeten kunnen bewijzen dat een algoritme **correct** is en **eindigt**. Eens dit bewezen, kunnen we de **complexiteit** (= de tijd die het neemt voor het stopt) nagaan van het algoritme.

4.2. Bewijzen over Problemen

We willen graag een algoritme bedenken die een bepaald probleem oplost. Dat is echter veel moeilijker, omdat we rekening moet houden met algoritmen die nog niet werden gemaakt.

Met een **probleem** bedoelen we een precieze omschrijving van een algemene taak. Met een **instantie van een probleem** bedoelen we de combinatie van het probleem en een specifieke invoer ervoor.

Complexiteit:

- De tijdscomplexiteit van een algoritme, voor een bepaalde **instantie**, is het aantal basisoperaties dat het algoritme uitvoert om de oplossing te bekomen.
- De tijdscomplexiteit van een algoritme, voor een **probleemgrootte**, is het grootste aantal basisoperaties dat het algoritme nodig kan hebben voor eender welke instantie met die grootte.
- De tijdscomplexiteit van **een probleem, voor een bepaalde grootte**, is de kleinst mogelijke tijdscomplexiteit van eender welk algoritme dat dat probleem oplost, voor die probleemgrootte.

Symbolisch in de verzamelingenleer:

- $T(a, i) =$ aantal stappen dat a uitvoert om instantie i op te lossen
- $T(a, n) = \max\{T(a, i) \mid i \in P \wedge g(i) = n\}$
- $T(P, n) = \min\{T(a, n) \mid a \in A\}$

4.3. Bewijs via Substitutie

Substitutie = een deel vervangen door een ander, zonder dat de waarde van de uitdrukking verandert.

Mogelijkheden:

- Een universeel gekwantificeerde variabele vervangen door een uitdrukking
- Een uitdrukking vervangen door een equivalente uitdrukking
- Herhaalde substitutie: meerdere keren substitutie toepassen (in één stap)

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.4. Ketens van (On)gelijkheden, Implicaties en Equivalenties

De gelijkheid van twee termen heeft een eigenschap die we transitiviteit noemen, en die als volgt samengevat kan worden:

$$\text{Als } x = y \text{ en } y = z, \text{ dan geldt: } x = z.$$

Deze regels volgen in feite direct uit het eerder geziene substitutieprincipe, als we bedenken dat zowel $=$ als $\Leftrightarrow$ “equivalent” betekenen in de zin van “hebben gegarandeerd dezelfde waarde”.

Het is belangrijk te beseffen dat elke stap in zo'n keten niet alleen correct moet zijn, maar “bewezen correct”. Dat wil zeggen dat we een stap enkel zetten als het een directe toepassing is van een bestaande regel.

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

	Rekenregel	
1	$U = \emptyset^c$	universele verzameling, zie sectie 1.4.5
2	$X \cup X^c = U$	volgt uit 3 via De Morgan
3	$X \cap X^c = \emptyset$	niets kan tegelijk wel en niet in X zitten
4	$(X^c)^c = X$	sectie 1.6.1
5	$X \cap X = X$	direct gevolg van 26
6	$X \cup X = X$	direct gevolg van 27
7	$X \cap \emptyset = \emptyset$	direct gevolg van 26
8	$X \cup \emptyset = X$	direct gevolg van 27
9	$X \cap U = X$	direct gevolg van 26
10	$X \cup U = U$	direct gevolg van 27
11	$X \setminus Y = X \cap Y^c$	oefening 1.27
12	$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$	definitie van Δ
13	$X \cup Y = Y \cup X$	commutativiteit van $\cup$
14	$X \cap Y = Y \cap X$	commutativiteit van $\cap$
15	$X \Delta Y = Y \Delta X$	commutativiteit van Δ
16	$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$	associativiteit van $\cup$
17	$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$	associativiteit van $\cap$
18	$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$	distributiviteit van $\cap$ over $\cup$
19	$Z \cap (X \cup Y) = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$	distributiviteit van $\cap$ over $\cup$
20	$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$	distributiviteit van $\cup$ over $\cap$
21	$Z \cup (X \cap Y) = (Z \cup X) \cap (Z \cup Y)$	distributiviteit van $\cup$ over $\cap$
22	$(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$	rechts-distributiviteit van $\setminus$ over $\cup$
23	$(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z)$	rechts-distributiviteit van $\setminus$ over $\cap$
24	$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$	De Morgan
25	$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$	De Morgan
26	$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Y = X$	sectie 1.6.10
27	$X \subseteq Y \Rightarrow X \cup Y = Y$	sectie 1.6.10
28	$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Leftrightarrow X = Y$	oefening 1.6
29	$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$	transitiviteit van $\subseteq$
30	$X \subseteq Y^c \Leftrightarrow Y \subseteq X^c$	oefening 1.36
31	$X = Y^c \Leftrightarrow Y = X^c$	sectie 1.6.1
32	$X \cap Y \subseteq X$	sectie 1.6.10
33	$X \subseteq X \cup Y$	sectie 1.6.10

Tabel 4.1: Enkele rekenregels voor de verzamelingenleer

4.5. Wederzijdse Implicatie

Als het nodig is om een equivalentie te bewijzen, moeten beiden implicaties bewezen worden.

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Dus werken met een soort **gevalsonderscheiding** (niet echt de juiste term, denk ik; zie 4.10 voor gevalsonderscheiding).

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.6. Inclusie en Gelijkheid van Verzamelingen

Variant op wederzijdse implicatie.

4.7. Modus Ponens

Modus ponens: Als P waar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan is Q waar.

Deze regel kan gebruikt worden om, uitgaande van een bewering P waarvan we al weten dat ze waar is, aan te tonen dat de bewering Q ook waar is. We noemen dat een **gevolgtrekking**. Merk op dat we, om de modus ponens te kunnen toepassen, twee beweringen nodig hebben waarvan we al weten dat ze waar zijn: niet alleen P , maar ook $P \Rightarrow Q$.

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.8. Herhaalde Gevolgtrekking

Wanneer we een redenering opzetten, is deze vaak van de volgende vorm. We beginnen met iets waarvan we al weten dat het waar is. In een **afleidingsstap** combineren we die met een andere bewering waarvan we weten dat die waar is (de verantwoording voor die stap), om tot een nieuwe bewering te komen, die dan afgeleid is uit de eerste.

In een redenering zetten we vaak meerdere afleidingsstappen na elkaar. Bij elke stap is het belangrijk om die te verantwoorden, d.w.z. om duidelijk te maken waarom die stap gemaakt kan worden.

Termen als “dus”, “bijgevolg”, “daaruit volgt”, enz. worden dikwijls gebruikt om de afgeleide bewering in te leiden. Termen als “omdat”, “aangezien”, worden vaak gebruikt om de verantwoording te geven.

Wanneer een **bewijs te lang** dreigt te worden, of een te ingewikkelde structuur dreigt te krijgen, kan het nuttig zijn om enkele **tussenresultaten** apart te bewijzen, in een **lemma**. Het hoofdbewijs wordt dan eenvoudiger doordat het gewoon de resultaten van de lemma's kan gebruiken.

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.9. Bewijs door Constructie

Seeing is believing. Als we moeten bewijzen dat er objecten bestaan met eigenschap P , volstaat het om een voorbeeld van een dergelijk object te tonen.

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.10. Gevalsonderscheiding

Soms is het erg moeilijk om een eenvoudig bewijs te geven dat onder alle omstandigheden werkt, omdat het erg van de omstandigheden afhangt welke redenering we kunnen maken. In zo'n geval kunnen we de verschillende gevallen apart behandelen. We splitsen het hele probleem dan eigenlijk op in kleinere delen, die we apart (en soms op een heel andere manier) behandelen. Dit wordt **gevalsonderscheid** genoemd.

Beschouw het als een **if-then-else** in het programmeren.

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.11. Implicaties Bewijzen

Bij een implicatie zijn er eigenlijk twee gevallen die bewezen moeten worden, maar het eerste gebeurt meestal impliciet.

Te bewijzen: $P \Rightarrow Q$.

Bewijs: Beschouw afzonderlijk de gevallen waarin P waar en onwaar is.

- Geval 1: P is onwaar. Dan is $P \Rightarrow Q$ triviaal waar.
- Geval 2: P is waar. In dit geval moeten we aantonen dat Q dan ook waar is. *We nemen aan dat P waar is, en leiden daaruit af dat Q waar is.*

Meestal wordt enkel het cursieve gedeelte bewezen.

4.12. Bewijs uit het Ongerijmde

Bewijs uit het ongerijmde = bewijs door **contradictie**.

Modus tollens: Als Q onwaar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan is P onwaar.

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.13. Bewijs door Inductie

Een bewijs door inductie bestaat uit twee stappen.

- Stap 1: We tonen aan dat $P(n)$ waar is voor $n = n_0$ (bv. " $P(n)$ geldt voor $n = 0$ "). Dit noemen we de **inductiebasis**.
- Stap 2: We tonen het volgende aan: voor elke $n \geq n_0$ geldt: als P geldt voor n , dan geldt het ook voor $n + 1$. Meer symbolisch opgeschreven: we tonen aan dat $\forall n \geq n_0: P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Dit noemen we de **inductiestap**.

Werd gezien bij Wiskunde 1. Zou geen probleem moeten zijn. Anders kan je nog steeds naar het voorbeeld kijken in de cursus.

4.13.1. Varianten van Bewijzen door Inductie

In stap 2 kan er gewerkt worden met een **inductiehypothese**:

Bewijs dat $\forall n \geq n_0: (\forall i, n_0 \leq i \leq n: P(i)) \Rightarrow P(n + 1)$.

In dit geval bewijzen we dus niet dat $P(n + 1)$ steeds volgt uit $P(n)$, maar wel dat $P(n + 1)$ steeds volgt uit het feit dat $P(i)$ geldt voor alle i van n_0 tot n . Dat is een strengere voorwaarde.

4.13.2. Valstrikken

Een bewijs door inductie is niet altijd zo eenvoudig als het op het eerste zicht misschien lijkt. Er kan heel gemakkelijk een fout in opduiken.

Zie voorbeeld in de cursus.

4.14. Redeneren met Ontkenningen

Bij redeneringen die via ontkenningen gaan, is het belangrijk om het volgende goed te begrijpen. Een bewering is steeds ofwel waar, ofwel onwaar. Wat wij weten over een bewering, valt evenwel in drie categorieën:

- we weten dat P waar is
- we weten niet of P waar is
- we weten dat P niet waar is

P	$\neg P$
zeker	onmogelijk
mogelijk	mogelijk
onmogelijk	zeker

4.15. Bewijs door Vaststelling

In sommige gevallen kunnen we de correctheid van een bewering simpelweg vaststellen, zonder een redenering op te zetten.

Bijvoorbeeld: we kunnen bewijzen dat twee formules logisch equivalent zijn door gewoon hun waarheidstabellen op te stellen, en vast te stellen dat ze gelijk zijn. Volgens de definitie van logische equivalentie betekent dat dan dat de formules logisch equivalent zijn.

→ Is een juiste manier van bewijzen, maar geeft weinig inzicht in waarom de bewering geldt.

4.16. Bewijs door Tekening

Speciaal geval van bewijs door vaststelling.

Het bewijs door tekening is enkel geldig als de tekening het meest algemeen geval toont.

Voorbeelden zijn handig: zie cursus.

4.17. Wanneer Welke Methode Gebruiken?

Deze methodes worden vaak gebruikt in volgende gevallen, maar het kunnen er ook anderen zijn.

- Er bestaat een x waarvoor $P(x)$ geldt: **constructie**
- Er bestaat geen x waarvoor $P(x)$ geldt: uit het **ongerijmde** “er bestaat een x waarvoor $P(x)$ bewijzen”
- Voor alle x geldt $P(x)$:
 - Uit het **ongerijmde**: zoek een tegenvoorbeeld
 - Door **inductie**
- Eigenschappen van concepten: via de **definitie**
- Andere voorbeelden:

verzamelingsleer	
$A = B$	via $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$
$A \subseteq B$	redeneer over een willekeurige $x \in A$: toon dat $x \in B$ toon dat $A \setminus B = \emptyset$
$A = \emptyset$	uit het ongerijmde, redeneer over een willekeurige $x \in A$
$\text{expr}_1 = \text{expr}_2$	via rekenregels en substitutie door vaststelling (Venn-diagram)
logica	
$P \Leftrightarrow Q$	via $P \Rightarrow Q$ en $P \Leftarrow Q$
$P \Rightarrow Q$	herhaalde gevolgtrekking (zie sectie 4.11) gevals onderscheid: toon aan dat $P \Rightarrow P_1 \vee P_2$, bewijs vervolgens $P_1 \Rightarrow Q$ en $P_2 \Rightarrow Q$ afzonderlijk
$\forall x \in A : P(x)$	redeneer over een willekeurig element x van A , toon $P(x)$ aan uit het ongerijmde, redeneer over een willekeurige $x \in A$ waarvoor $\neg P(x)$ per inductie
$\exists x \in A : P(x)$	toon een x waarvoor $P(x)$ geldt (constructie / tekening)
P	neem een eigenschap Q die al bewezen is, bewijs $Q \Rightarrow P$
$P \equiv Q$	door vaststelling (waarheidstabel) door herhaalde substitutie
herschrijvingen	
	rekenregels bekende eigenschappen via definitie omzetten naar een beter begrepen niveau

4.18. Correctheidsbewijzen van Algoritmen

Een algoritme is een “voorschrift” om de oplossing voor een bepaald probleem te berekenen. Zo'n voorschrift wordt pas als een algoritme beschouwd als het de volgende eigenschappen heeft:

- 1) De procedure is ondubbelzinnig beschreven; dit houdt in:
 - (a) Elke stap in de procedure is eenduidig en ondubbelzinnig beschreven
 - (b) De volgorde van de stappen ligt eenduidig vast
- 2) De procedure eindigt steeds

Een algoritme heeft steeds een bepaald doel, bijvoorbeeld de oplossing voor een bepaald probleem berekenen. Het algoritme is correct als dat doel bereikt wordt.

Uit de beschrijving van een algoritme is niet altijd direct duidelijk dat het steeds eindigt, en steeds een correcte oplossing teruggeeft. Beide eigenschappen moeten bewezen worden.

4.18.1. Voorbeeld: Algoritme van Euclides

Uitgewerkt voorbeeld zie cursus.

4.18.2. Enkele Algemene Principes

While-lussen: in het begin van de lus geldt P, eens de while-lus geëindigd geldt P niet meer.

If-then-else: Als de then-blok wordt uitgevoerd, geldt P. Als de else-blok uitgevoerd wordt, geldt P niet.

4.18.3. Voorbeeld: Zoeken in een Geordende Rij

Uitgewerkt voorbeeld zie cursus.

5. Relaties

5.1. Koppels en Tupels

Definitie 5.1. Gegeven n objecten $x_1, x_2, \dots, x_n$, is “het **tupel** met als componenten $x_1, x_2, \dots, x_n$ ” een nieuw object, dat genoteerd wordt als $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Een tuple met twee componenten wordt gewoonlijk een **koppel** genoemd.

De volgorde is dus van belang en een component mag meerdere keren voorkomen.

Definitie 5.2. Twee tupels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ zijn gelijk als en slechts als $m = n$ en $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i = y_i$.

Je kan een tuple als een array zien in programmeertalen.

5.2. Cartesisch Product van Twee Verzamelingen

Definitie 5.3. Het **Cartesisch product** of **productverzameling** van twee verzamelingen A en B , genoteerd

$$A \times B, \text{ is } A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Voorbeeld:

Het Cartesisch product van $A = \{S, M, L\}$ en $B = \{z, w, b\}$ is

$$A \times B = \{(S, z), (S, w), (S, b), (M, z), (M, w), (M, b), (L, z), (L, w), (L, b)\}.$$

Toegepast op meer dan twee verzamelingen:

Definitie 5.4. Het **Cartesisch product** van n verzamelingen $A_i, i = 1, \dots, n$, genoteerd $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ of $\prod_{i=1}^n A_i$, is

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}$$

Een Cartesisch product van een verzameling kan ook gebeuren met zichzelf. Er wordt dan met een exponent gewerkt.

Definitie 5.5. Zij A een verzameling. $A^1 = A$, en $\forall n > 1 : A^n = A^{n-1} \times A$.

5.3. Relaties

5.3.1. Relatie

Het concept “**relatie**” wordt gebruikt om een **verband** tussen twee of meer dingen aan te geven.

Voorbeeld:

- Een fiets heeft twee wielen $\rightarrow$ Relatie: “... heeft ... wielen”
- $\rightarrow \{(fiets, 2), (auto, 4), (boot, 0), (bromfiets, 2), (skateboard, 4)\}$

Definitie 5.6. Een **relatie** tussen A en B is een deelverzameling van $A \times B$.

Toegepast op meer dan twee verzamelingen:

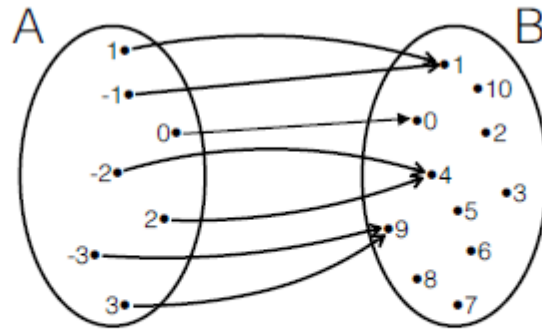
Definitie 5.7. Een **relatie** over $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ is een deelverzameling van $\prod_{i=1}^n A_i$.

Een relatie over n verzamelingen wordt ook wel een **n-plaatsige of n-aire relatie** genoemd.

De relatie R met (x, y) als element wordt meestal zo geschreven: $R(x, y)$.

5.3.2. Grafische Voorstelling

Een relatie wordt grafisch als volgt getekend:



Figuur 5.1: De relatie “...heeft als kwadraat ...” tussen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ en $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

In tegenstelling tot Venndiagrammen worden A en B hierbij gewoonlijk afzonderlijk (niet-overlappend) getekend, zelfs als ze een niet-lege doorsnede hebben.

5.4. Inverse Relatie

Definitie 5.8. Zij R een binaire relatie. De **inverse relatie** van R , genoteerd R^{-1} , is gedefinieerd als volgt:

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}.$$

Op een grafische voorstelling vinden we de inverse relatie door de pijlen gewoon om te keren.

Stelling 5.1. Zij R en S twee binaire relaties. $S = R^{-1}$ als en slechts als $R = S^{-1}$.

5.5. Samengestelde Relatie

Definitie 5.9. Zij $R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq C \times D$. De samengestelde relatie, of **samenstelling**, van R en S , genoteerd $S \circ R$, is

$$S \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in B : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$$

Uitgesproken als “S na R”.

Wikipedia heeft daar een goed voorbeeld van:

Voorbeeld [\[bewerken \]](#)

Beschouw de volgende twee relaties tussen de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en zichzelf:

$$R = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$$

$$S = \{(0, 5), (0, 10), (4, 2), (4, 4)\}$$

Dan is hun samengestelde relatie

$$S \circ R = \{(0, 5), (0, 10), (2, 2), (2, 4)\}$$

In dit geval heeft ook $R \circ S$ zin, en

$$R \circ S = \{(4, 4)\}$$

Stelling 5.2. Voor alle binaire relaties R, S, T geldt: $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Definitie 5.10. Als R een binaire relatie is, wordt R^n voor $n \geq 1$ als volgt gedefinieerd:

- $R^1 = R$
- $\forall n > 1: R^n = R \circ R^{n-1}$

5.6. Toepassing: Databanken

Voorbeeld zie cursus.

6. Functies

6.1. Functies

Definitie 6.1. Een relatie $R \subseteq A \times B$ is een **functie van A naar B** als en slechts als voor elke $x \in A$ hoogstens één $(x, y) \in R$ bestaat. y wordt het beeld van x onder de functie genoemd. A wordt de **bronverzameling** (soms domein) genoemd en B de **doelverzameling** (soms co-domein) van de functie.

$$\forall x \in A: (x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$$

Notatie: f is een functie van A naar B , x wordt afgebeeld op E .

$$f: A \rightarrow B: x \mapsto E$$

Het beeld van x onder de functie f wordt genoteerd als $f(x)$.

$$\forall x \in A, y \in B: (x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)$$

Als x **geen beeld** heeft onder f , zeggen we dat $f(x)$ **niet gedefinieerd** is.

Definitie 6.2. Het **domein** van een functie $f: A \rightarrow B$ is $\{x \mid \exists y: (x, y) \in f\}$. Het **bereik** van een functie $f: A \rightarrow B$ is $\{y \mid \exists x: (x, y) \in f\}$.

Het domein van een functie f is dus de verzameling van alle x waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is; dit is een deelverzameling van de bronverzameling.

Het bereik is de verzameling van alle elementen van B die het beeld zijn van een element in A ; het is een deelverzameling van de doelverzameling.

6.2. Afbeeldingen en Bijecties

Definitie 6.3. Een functie $f: A \rightarrow B$ is een **afbeelding van A naar B** als en slechts als voor elke $x \in A$ precies één $(x, y) \in f$ bestaat.

Definitie 6.4. Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is een **surjectie** als en slechts als elke $y \in B$ het beeld is van een $x \in A$.

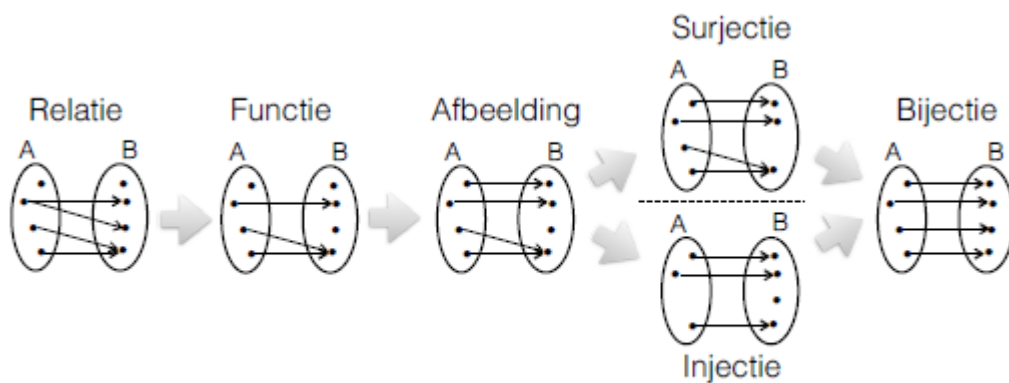
Definitie 6.5. Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is een **injectie** als en slechts als elke $x \in A$ op een verschillende $y \in B$ afgebeeld wordt. Met andere woorden: $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Een andere manier om dit te bekijken is:

- Bij een surjectie komt elke $y \in B$ minstens 1 keer voor als beeld.
- Bij een injectie komt elke $y \in B$ hoogstens 1 keer voor als beeld.

Definitie 6.6. Een relatie $R \subseteq A \times B$ is een **bijectie** van A naar B als en slechts als voor elke $x \in A$ precies één $(x, y) \in R$ bestaat, en voor elke $y \in B$ precies één $(x, y) \in R$.

Samenvattend:



Figuur 6.1: Relaties, functies, afbeeldingen, surjecties, injecties, bijecties

Wanneer de doelverzameling B gelijk is aan de bronverzameling A, wordt een afbeelding ook wel een **transformatie** genoemd, en een bijectie een **permutatie**.

Definitie 6.7. Een functie $f : A \rightarrow A$ is een **transformatie** als en slechts als elke $x \in A$ een beeld heeft onder f .

Definitie 6.8. Een functie $f : A \rightarrow A$ is een **permutatie** als en slechts als elke $x \in A$ een beeld heeft onder f , en ook precies 1 keer het beeld is van een x onder f .

6.3. Functies met Meerdere Argumenten

In $f(x)$ wordt x het **argument** van de functie genoemd. Binaire relaties geven aanleiding tot functies met één argument. We kunnen ook functies met meerdere argumenten definiëren, op basis van ternaire of, algemener, n -aire relaties.

Definitie 6.9. Een relatie $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B$ is een **functie met n argumenten** als en slechts als voor elk tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ hoogstens één $y \in B$ bestaat, zo dat $(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in R$. De termen beeld, bronverzameling, doelverzameling, domein, bereik, afbeelding, enzovoort worden overgenomen.

Soms wordt een functie met n argumenten ook een n -dimensionale of een n -aire functie genoemd, of een functie in n -veranderlijken. Merk op dat dat een **n -aire functie met een $n + 1$ -aire relatie** overeenkomt. De uitvoer y wordt meegeteld als we de functie als een relatie bekijken, maar niet als we ze als functie bekijken.

6.4. Operatoren op Functies

Definitie 6.10. De **samenstelling** van een functie $f : A \rightarrow B$ en $g : B \rightarrow C$ is de functie $h : A \rightarrow C : x \mapsto (f(x))$. De samenstelling van f en g wordt ook genoteerd als $g \circ f$ (spreek uit: "g na f").

Indien een functie meermaals samengesteld wordt met zichzelf, noteren we: f^n (merk op: geen macht!)

Definitie 6.11. Zij $f : A \rightarrow B$ een functie waarvoor geldt dat $\forall x \in A : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. De **inverse functie** van f is de functie $f^{-1} : B \rightarrow A$, waarvoor geldt dat $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Merk op dus dat inverse functies moeten voldoen aan het eerste gedeelte van de definitie, want anders zijn ze niet inverteerbaar.

Functies die een inverse functie hebben, worden **inverteerbare functies** genoemd.

Definitie 6.12. De **identiteitsfunctie** over een verzameling A , genoteerd i_A , is

$$i_A: A \rightarrow A : x \mapsto x$$

Stelling 6.1. Zij $f: A \rightarrow B$ een inverteerbare afbeelding. Dan geldt: $f^{-1} \circ f = i_A$.

7. Equivalente en Orderelaties

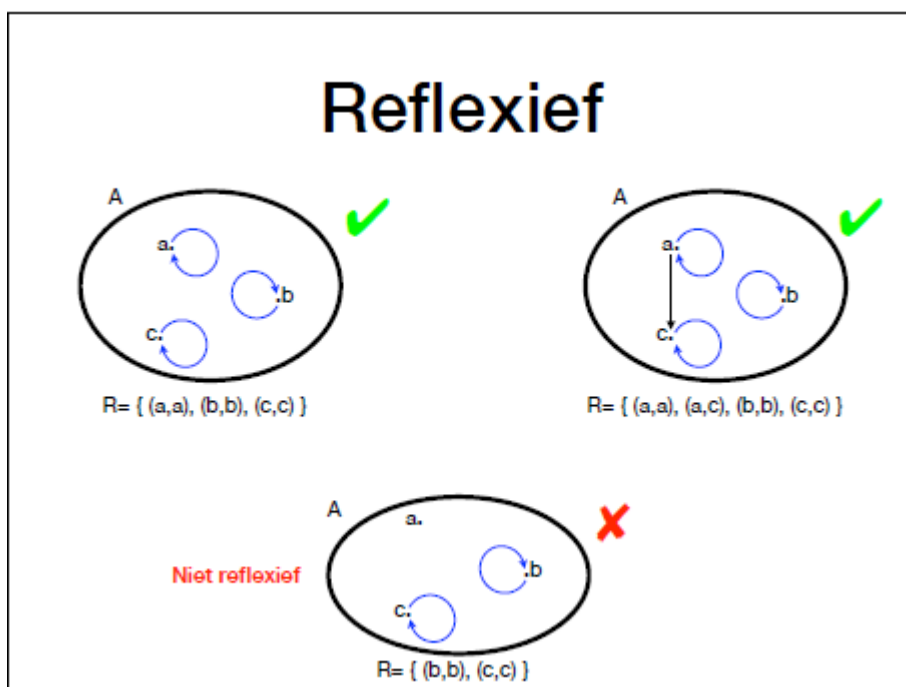
7.1. Binaire Relaties over Dezelfde Verzameling

In deze sectie focussen we op binaire relaties over één en dezelfde verzameling; m.a.w. relaties van de vorm $R \subseteq A \times A$, met A een willekeurige verzameling.

7.1.1. Reflexiviteit

Definitie 7.1. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is **reflexief** als en slechts als

$$\forall x \in A : (x, x) \in R$$



Definitie 7.2. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is **anti-reflexief** als en slechts als

$$\forall x \in A : (x, x) \notin R$$

Voorbeelden:

- De relatie $\leq$ over R^2 is reflexief, want voor elke $x \in R$ geldt: $x \leq x$.
- De relatie $<$ over R^2 is anti-reflexief, want voor geen enkele $x \in R$ geldt: $x < x$.

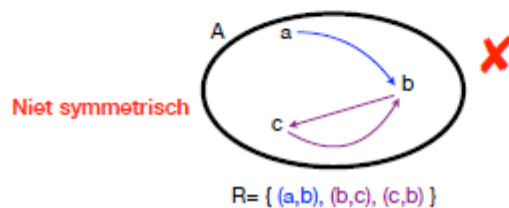
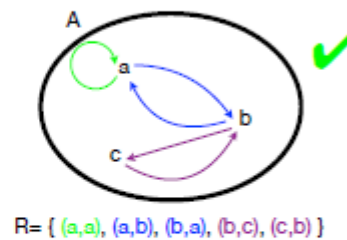
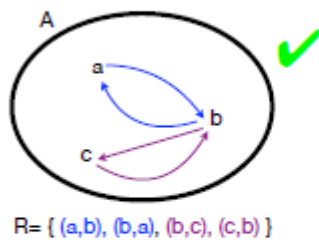
Als $A \neq \emptyset$ sluiten reflexiviteit en anti-reflexiviteit elkaar uit: een **relatie kan het een of het andere zijn**, maar niet beide. Het is wel mogelijk dat een relatie **geen van beide** is.

7.1.2. Symmetrie

Definitie 7.3. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is **symmetrisch** als en slechts als

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$$

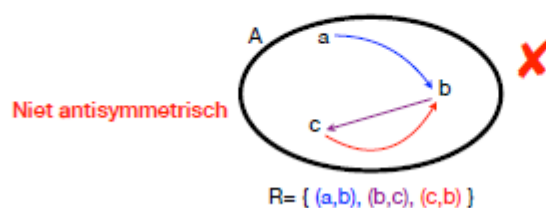
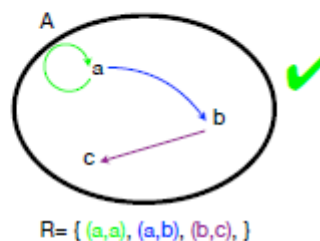
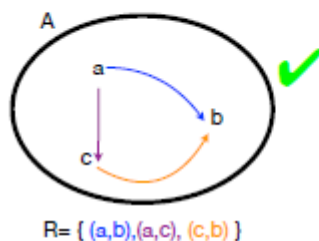
Symmetrisch



Definitie 7.4. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is **antisymmetrisch** als en slechts als

$$\forall x, y \in A: (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

Anti-symmetrisch



Als een relatie antisymmetrisch is, betekent dit dat ofwel (x, y) in de relatie kan zitten, ofwel (y, x) , maar niet allebei; met uitzondering van het geval waarin $x = y$. Met andere woorden, antisymmetrie spreekt reflexiviteit niet tegen.

Merk op dat het perfect mogelijk is om een relatie te hebben die niet symmetrisch en ook niet antisymmetrisch is.

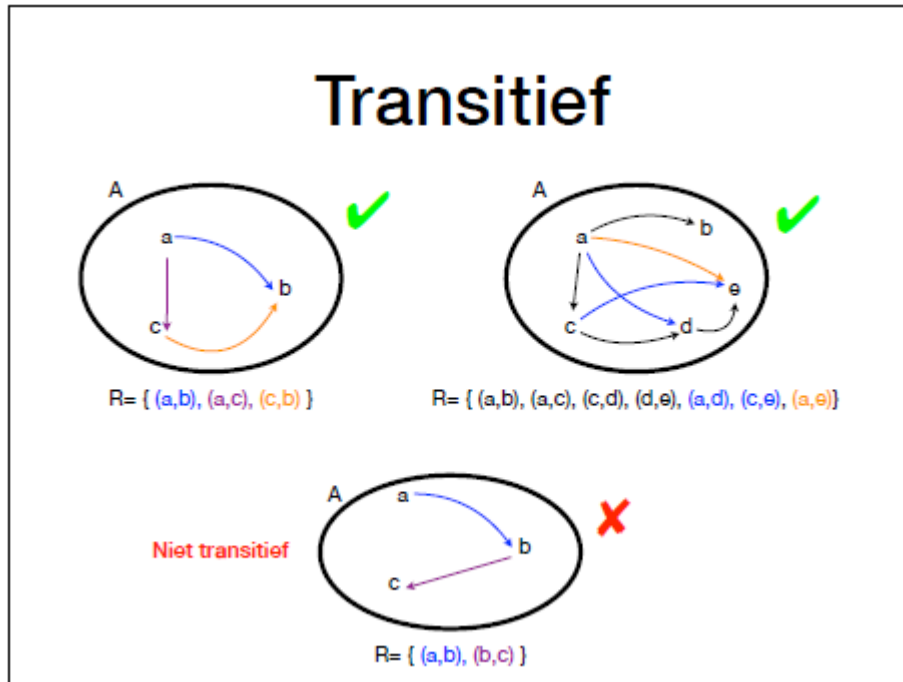
7.1.3. Transitiviteit

Definitie 7.5. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is **transitief** als en slechts als

$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

Voorbeeld:

- De relatie $\leq$ over $\mathbb{R}^2$ is transitief: als $x \leq y$ en $y \leq z$, is automatisch $x \leq z$.



7.2. Equivalentierelaties

Definitie 7.6. Een **equivalentierelatie** is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is.

Voorbeelden:

- $=$
- $\Leftrightarrow$

Notatie: Het symbool $\sim$ wordt vaak gebruikt om een willekeurige equivalentierelatie aan te duiden.

Definitie 7.7. Zij A een verzameling waarvoor een equivalentierelatie $\sim$ gedefinieerd is, en zij $x \in A$. De **equivalentieklasse** van x , genoteerd $K(x)$, is de verzameling van alle elementen van A die equivalent zijn met x . M.a.w.: $K(x) = \{y \in A \mid x \sim y\}$

Definitie 7.8. $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ is een **partitie** van A als en slechts als

- $\forall x \in A : \exists ! P_i \in P : x \in P_i$
- $\forall P_i \in P : P_i \neq \emptyset$

Met andere woorden: een partitie van een verzameling A is een opdeling van A in niet-lege deelverzamelingen, zo dat **elk element van A in precies één van die deelverzamelingen zit**.

Voorbeeld:

- Zij $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

- $\{\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f, g, h, i, j\}\}$ is een partitie van A
- $\{\{a, b\}\}$ is geen partitie van A

Met elke partitie van een verzameling A komt een equivalentierelatie overeen, en met elke equivalentierelatie een partitie.

Stelling 7.1. Zij $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ een partitie van een verzameling A . De relatie $R = \{(x, y) \mid \exists P_i : x \in P_i \wedge y \in P_i\}$ is een equivalentierelatie.

Stelling 7.2. Zij $\sim$ een equivalentierelatie over A . Definieer $P = \{K(x) \mid x \in A\}$, met $K(x)$ de equivalentieklasse van x voor $\sim$. P is een partitie van A .

Definitie 7.9. Zij A een verzameling met een equivalentierelatie $\sim$. De partitie van A die bestaat uit alle equivalentieklassen van A onder $\sim$, wordt de **quotiëntverzameling** van A onder $\sim$ genoemd, genoteerd $A / \sim$.

7.3. Orderrelaties

7.3.1. Partiële en Totale Ordes

Definitie 7.10. Een **orderrelatie** is een relatie die reflexief, antisymmetrisch en transitief is.

Notatie: $x \leq y$. Uitgesproken als “ x komt voor of is gelijk aan y ”; of “ x is kleiner dan of gelijk aan y ”.

Wanneer we over een verzameling A willen spreken waarover een orderrelatie $\leq$ gedefinieerd is, introduceren we vaak de beide samen als een **geordende verzameling** $A, \leq$.

Definitie 7.11. Een **totale orde** is een orderrelatie waarvoor geldt dat $\forall x, y : x \leq y \vee y \leq x$

Partiële orde = een orderrelatie die niet totaal is.

7.3.2. Boven- en Ondergrenzen

Definitie 7.12. Zij X een deelverzameling van een geordende verzameling $A, \leq$. We noemen $a \in A$ een **bovengrens** voor X als en slechts als $\forall x \in X : x \leq a$, en een **ondergrens** voor X als en slechts als $\forall x \in X : a \leq x$.

Met andere woorden: een bovengrens voor X is groter dan of gelijk aan alle elementen van X , een ondergrens voor X is kleiner dan of gelijk aan alle elementen van X .

Merk op dat in de geordende verzameling $\mathbb{N}$, | een ondergrens hetzelfde betekent als een gemene deler, en een bovengrens een gemeen veelvoud.

Definitie 7.13. Zij X een deelverzameling van een geordende verzameling $A, \leq$. Als er een bovengrens b van X bestaat zodat $b \leq b'$ voor alle bovengrenzen b' van X , dan zeggen we dat b het **supremum** van X is.

Met andere woorden: het **supremum** van X is de **kleinste bovengrens** voor X , als die bestaat. Het supremum is steeds uniek.

Definitie 7.14. Zij X een deelverzameling van een geordende verzameling $A, \leq$. Als er een ondergrens o van X bestaat zodat $o' \leq o$ voor alle ondergrenzen o' van X , dan zeggen we dat o het **infimum** van X is.

Met andere woorden: het **infimum** van X is de **grootste ondergrens** voor X , als die bestaat. Het infimum is steeds uniek.

Stelling 7.3. Zij $A = \mathcal{P}(U)$ voor een bepaalde verzameling U . In de geordende verzameling $A, \subseteq$ geldt voor elke deelverzameling X van A :

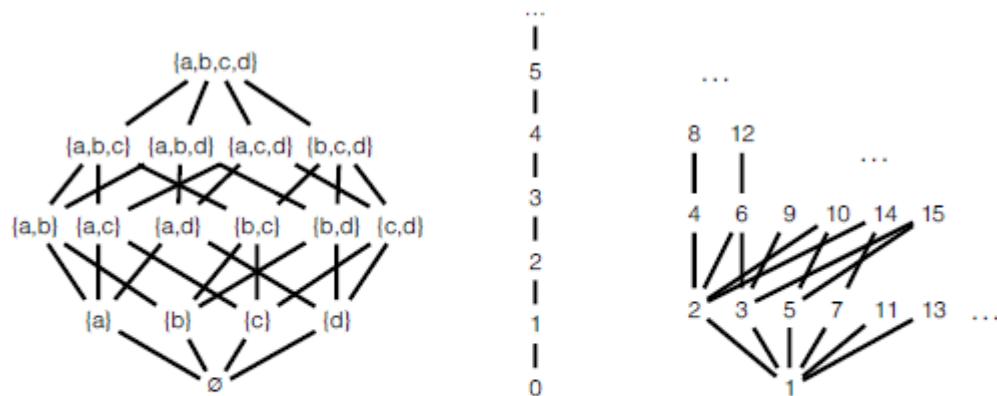
$$\sup(X) = \bigcup_{V \in X} V.$$

7.3.3. Tralies

Definitie 7.15. Een **complete tralie** is een geordende verzameling $A, \leq$ met de eigenschap dat elke eindige verzameling $X \subseteq A$ een supremum en infimum in A heeft.

Stelling 7.4. Voor eender welke verzameling U geldt: $\mathcal{P}(U), \subseteq$ is een complete tralie.

Een tralie wordt meestal grafisch voorgesteld met het kleinste element onderaan en het grootste bovenaan. Er wordt dan een lijn getekend tussen de elementen om hun relatie aan te duiden (transitiviteit wordt niet getekend).



Figuur 7.1: Grafische voorstelling van tralies. Links: tralie van $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}), \subseteq$. Midden: tralie van $\mathbb{N}, \leq$. Rechts: tralie van $\mathbb{N}_0, |$.

7.4. Quasi-orde

Definitie 7.16. Een **quasi-orde** is een relatie die reflexief en transitief is.

Het begrip quasi-orde veralgemeent zowel equivalentierelaties als orderelaties. Een symmetrische quasi-orde is per definitie een equivalentierelatie, en een antisymmetrische een orderelatie; maar er zijn ook quasi-orde's die geen van beide zijn.

In een verzameling met een quasi-orde zijn er groepjes van equivalente elementen (equivalentieklassen); als we elk groepje als één geheel beschouwen, bekomen we een geordende verzameling.

7.5. Toepassing: Efficiënt Zoeken in Zoekruimten

Uitgewerkt voorbeeld in cursus.

8. Kardinaliteit

8.1. Kardinaliteit van een Verzameling

Definitie 8.1. De **kardinaliteit** van een verzameling is het aantal elementen dat de verzameling bevat. De kardinaliteit van S wordt genoteerd als $|S|$ of $\#S$.

Voorbeelden:

- $|\emptyset| = 0$
- $|\{a, b, c\}| = 3$

Kardinaliteit van een...

- Eindige verzameling = natuurlijk getal
- Oneindige verzameling = nooit een natuurlijk getal

Een **kardinaalgetal** = aantal elementen in een verzameling.

Een kardinaalgetal kan een natuurlijk getal zijn, maar ook andere “symbolen”.

Voorbeeld:

- Kardinaalgetal voor $\mathbb{N}$: $\aleph_0$ (uitgesproken als “aleph-nul”)

Axioma 8.1. Zij A en B twee verzamelingen.

- $|A| \leq |B|$ als en slechts als er een injectie van A naar B bestaat.
- $|A| = |B|$ als en slechts als er een bijectie tussen A en B bestaat.

Kardinaliteit van oneindige verzamelingen: het **Hilbert Hotel**.

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_Kqkl9Zo

8.2. Telproblemen

Het volgende is enkel van toepassing op eindige verzamelingen.

8.2.1. Kardinaliteit van de Unie

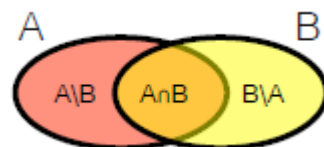
Stelling 8.1. Als A en B disjunct zijn, geldt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Kan gezien worden als de definitie van de optelling.

Stelling 8.2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Stelling 8.3. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Voor meer dan drie verzamelingen wordt het inclusie-exclusie-principe gebruikt. Formeel opgeschreven ziet dat principe er als volgt uit:



$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} | I \text{ oneven}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} | I \text{ even}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

8.2.2. Kardinaliteit van het Cartesisch Product

Stelling 8.4. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

M.a.w.: de kardinaliteit van de productverzameling is het product van de kardinaliteiten.

Stelling 8.5. $|A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$.

Gevolg 8.1. $|A^k| = |A|^k$

8.2.3. Kardinaliteit van de Machtsverzameling

Stelling 8.6. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Dit is de reden waarom de notatie 2^A wordt gebruikt.

8.2.4. Aantal Afbeeldingen van A naar B

Stelling 8.7. $|B^A| = |B|^{|A|}$

8.2.5. Aantal Injecties van A naar B

Definitie 8.2. Zij n een natuurlijk getal. De faculteit van n , genoteerd $n!$, is gelijk aan

$$\begin{array}{ll} n! = 1 & \text{als } n = 0; \\ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{als } n > 0. \end{array}$$

$n!$ wordt kort uitgesproken als “n faculteit” (Engels: “n factorial”).

Stelling 8.8. Zij A en B twee verzamelingen met kardinaliteit m en n , en $m \leq n$. Het aantal injecties van A naar B gelijk aan $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$, of, korter geschreven: $\frac{n!}{(n-m)!}$.

8.2.6. Aantal Bijecties tussen A en B

Als A en B niet evenveel elementen hebben $\rightarrow$ Geen bijectie $\rightarrow$ Kardinaliteit 0.

Stelling 8.9. Zij A en B twee verzamelingen met kardinaliteit n . Dan is het aantal bijecties tussen A en B gelijk aan $n!$.

8.2.7. Aantal Volgordes waarin de Elementen van een Verzameling Opgelijst Kunnen Worden

Het aantal volgordes waarin de elementen van een verzameling opgelijst kunnen worden, wordt ook wel het aantal **permutaties** van de verzameling genoemd. $\rightarrow = n!$.

8.2.8. Aantal Deelverzamelingen van grootte m van een Verzameling met Kardinaliteit n

Definitie 8.3. Een **combinatie** van m elementen uit een verzameling A is een deelverzameling van A met m elementen.

Stelling 8.10. Zij A een verzameling met kardinaliteit n . Dan is het aantal combinaties van m elementen uit A gelijk aan $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Definitie 8.4. De **binomiaalcoëfficiënt** $\binom{n}{m}$ wordt gedefinieerd als $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$

8.2.9. Toepassing: complexiteit van sorteeralgoritmen

Een mooi voorbeeld: zie cursus.

Stelling 8.11. Zij A een algoritme dat rijen sorteert door meermaals twee elementen ervan te vergelijken en afhankelijk van die vergelijking elementen van die rij van plaats te verwisselen. Voor elk getal n bestaat er altijd een rij van lengte n waarvoor A minstens $\log_2(n!)$ vergelijkingen nodig heeft.

8.3. Kardinaliteit van een Oneindige Verzamelingen

8.3.1. Kardinaliteit van $\mathbb{N}$

Zoals eerder gezegd: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

8.3.2. Kardinaliteit van $\mathbb{Z}$

Stelling 8.12. $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

8.3.3. Kardinaliteit van $\mathbb{Q}$

Stelling 8.13. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

8.3.4. Kardinaliteit van $\mathbb{R}$

Stelling 8.14. Er bestaat geen bijectie tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$.

$\rightarrow |\mathbb{R}| \neq \aleph_0$

Een verzameling waarvan de kardinaliteit $\aleph_0$ is, wordt aftelbaar oneindig genoemd. Een verzameling waarvan de kardinaliteit groter is dan $\aleph_0$ wordt onaftelbaar, of overaftelbaar, genoemd. Voor aftelbare verzamelingen is het mogelijk om een methode te bedenken om alle elementen op te lijsten. Voor elk element van zo'n verzameling kan je berekenen op welke plaats in de oplijsting het element komt. Als je zou aftellen vanaf dat element tot aan het eerste in de lijst, zou je altijd na een eindig aantal stappen het eerste element bereiken; vandaar de term "aftelbaar". Voor onaftelbare verzamelingen is het onmogelijk om een methode te bedenken om alle elementen op te lijsten, zoals we zagen bij het diagonalisatiebewijs van Cantor.

8.3.5. Rekenen met Oneindige Kardinaalgetallen

Rekenregels:

- Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: $n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt: $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt: $\aleph_0^n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n > 1$ geldt: $n^{\aleph_0} \geq \aleph_0$.
- Het aantal deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.
- Het aantal functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$.

9. Structuren

Werd niet behandeld.

Oefeningen

Merk op: De opgaves zijn niet altijd goed ge-copy-paste.

Hoofdstuk 1

Oefening 1.1. Definieer de volgende verzamelingen door opsomming.

- De verzameling van alle dagen van de week.
- De verzameling van landen in de Benelux.

- a) {maandag, dinsdag, woensdag, donderdag, vrijdag}
b) {België, Nederland, Luxemburg}

Oefening 1.2. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

- maandag $\in$ DagenVanDeWeek
- 2017 $\in$ Schrikkeljaren
- januari $\in$ DagenVanDeWeek
- februari $\notin$ DagenVanDeWeek

- a) Waar
b) Niet waar
c) Niet waar
d) Waar

Oefening 1.3. Druk met de pas geziene notatie uit dat 1 geen element van de lege verzameling is.

| $1 \notin \emptyset$

Oefening 1.4. Wat betekent elk van de volgende beweringen? Is de bewering waar of onwaar?

- $\emptyset \subset \emptyset$
- $\emptyset \subseteq \emptyset$
- voor alle singletons A geldt dat $\emptyset \subseteq A$
- voor alle singletons A geldt dat $\emptyset \subset A$

- a) waar
b) onwaar
c) waar
d) waar

Oefening 1.5. Is het mogelijk dat $A \not\subset B$ en $A \subseteq B$?

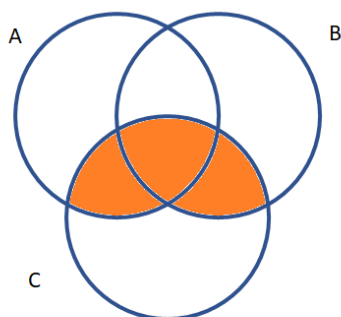
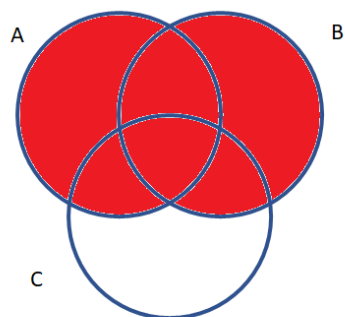
| Ja, als de verzamelingen A en B gelijk zijn.

Oefening 1.6. Toon aan, door erover te redeneren, dat voor alle verzamelingen A en B het volgende geldt: als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$, dan is $A = B$.

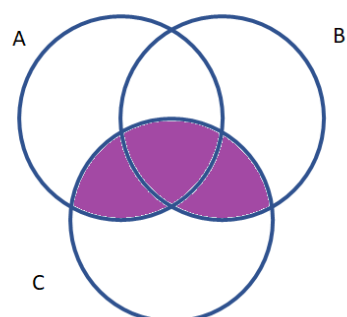
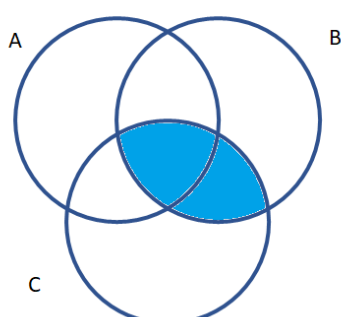
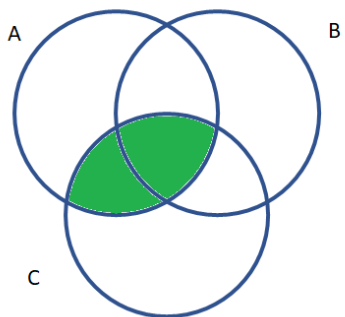
| $((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall y \in B \Rightarrow y \in A)) \Rightarrow A = B$

...

Oefening 1.42. Toon met een Venndiagram aan dat de bovenstaande gelijkheid in het algemeen geldt.



Rood = A unie B
 Oranje = Rood doorsnede C
 Groen = A doorsnede C
 Blauw = B doorsnede C
 Paars = Groen unie Blauw



Zoals te zien zijn paars en oranje hetzelfde.

Hoofdstuk 2

Oefening 2.19. Toon het verschil aan tussen $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ en $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ door beide beweringen te interpreteren voor $P = A \subseteq B$; $Q = C \subseteq A$ en $R = C \subseteq B$.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Hoofdstuk 3

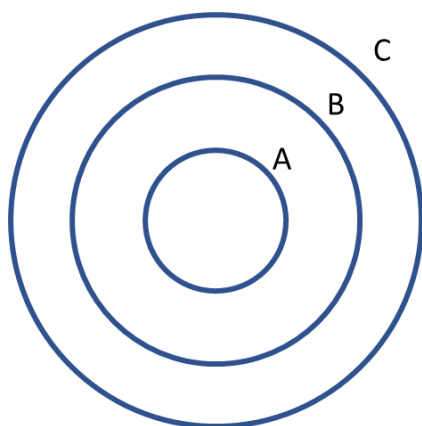
Hoofdstuk 4

Oefening 4.1. Bewijs dat $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$, door gebruik te maken van de rekenregels uit de verzamelingenleer, en door herhaalde substitutie. Verklaar elke stap in detail, zoals in Voorbeeld 4.7.

$$\begin{aligned} A^c \cup B &= (A \setminus B)^c \\ &= (A \cap B^c)^c \\ &= A^c \cup (B^c)^c \\ &= A^c \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap B^c \\ \text{De Morgan} \\ (A^c)^c &= A \end{aligned}$$

Oefening 4.3. Toon de transitiviteit van $\Rightarrow$ aan via een Venn-diagram. Toon de transitiviteit van $\Leftrightarrow$ en $\Rightarrow$ aan via waarheidstabellen.



P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R) = X$	$(P \Rightarrow R) = Y$	$X \Rightarrow Y$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$Q \Leftrightarrow R$	$(P \Leftrightarrow Q \wedge Q \Leftrightarrow R) = X$	$(P \Leftrightarrow R) = Y$	$X \Rightarrow Y$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Hoofdstuk 5

Hoofdstuk 6

Hoofdstuk 7

Hoofdstuk 8

Oefening 8.1. Zij $A \leq B \Leftrightarrow |A| \leq |B|$. Bewijs dat $\leq$ een quasi-orde is. (M.a.w., $\leq$ definieert een quasi-orde over alle verzamelingen.)

| ...

Oefening 8.2. Bart heeft 3 knikkers. Mieke heeft 5 knikkers. Als ze hun knikkers samenleggen, hoeveel knikkers hebben ze dan?

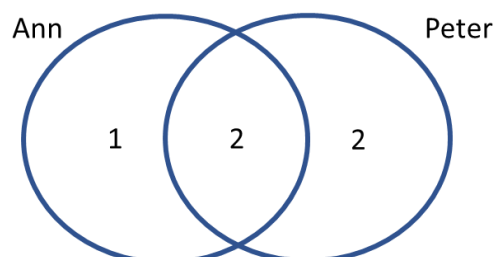
| 3 knikkers + 5 knikkers = 8 knikkers

Oefening 8.3. Het laatste deel van het bovenstaande bewijs (na “als we dat allemaal samenbrengen...”) gebruikt herhaaldelijk substitutie. Onderlijn in elke lijn van de keten gelijkheden het deel van de formule dat gesubstitueerd wordt.

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= \underline{|A \cap B|} + \underline{|A \setminus B|} + |B \setminus A| \\ &= |A| + \underline{|B \setminus A|} \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

Oefening 8.4. Een weinig populaire richting aan de universiteit telt maar 2 studenten, Ann en Peter. Ann moet deze zittijd examen afleggen van 3 vakken, en Peter moet examen afleggen van 4 vakken. Er zijn 2 vakken waarvan ze beide examen moeten afleggen. Van hoeveel vakken in totaal moet er een examen ingericht worden?

Stel $A = \{\text{examens Ann}\}$ en $P = \{\text{examens Peter}\}$. Er zijn twee vakken waarvan ze beide examen moeten afleggen, dus de twee verzamelingen zijn niet disjunct. Volgens stelling 8.2 geldt dan dat de kardinaliteit van de unie van alle examens gelijk is aan de som van de kardinaliteit van de beide verzamelingen apart, verminderd met de kardinaliteit van hun doorsnede. In dit geval is $|A| = 3$, $|P| = 4$ en $|A \cap P| = 2$. Hieruit volgt dan $3 + 4 - 2 = 5$. Dus er zijn 5 vakken waarvan een examen moet ingericht worden.



Oefening 8.5. Schrijf naast elke stap in het voorgaande bewijs de regel die toegepast wordt, en geef aan op welke deuluitdrukking die regel toegepast is.

| (Te) omslachtige oefening om hier over te typen...

Oefening 8.6. Een vogelhok in een dierentuin bevat 10 vogels die kunnen vliegen, 12 vogels die kunnen zingen, en 15 vogels met felgekleurde veren. 5 vogels kunnen zowel vliegen als zingen. Van de felgekleurde vogels kunnen er in totaal 9 vliegen en 8 zingen. 5 vogels kunnen zingen en vliegen en zijn felgekleurd. Hoeveel vogels zitten er in totaal in dit hok?

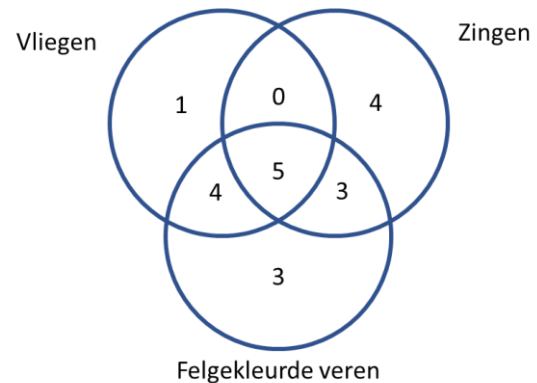
Stel:

$V = \{\text{vogels die kunnen zingen}\},$
 $Z = \{\text{vogels die kunnen vliegen}\}$ en
 $K = \{\text{vogels die felgekleurde veren hebben}\}.$
 $|V| = 15, |Z| = 12, |K| = 15, |V \cap Z| = 5, |V \cap K| = 9, |Z \cap K|$ en $|V \cap Z \cap K| = 5$

Gebruikmakend van de stelling 8.3, kan het volgende worden opgesteld:

$$\begin{aligned} &|V \cup Z \cup K| \\ &= |V| + |Z| + |K| - |V \cap Z| - |V \cap K| - |Z \cap K| + |V \cap Z \cap K| \\ &= 10 + 12 + 15 - 5 - 9 - 8 + 5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Er zijn dus in totaal 20 vogels in het vogelhok.

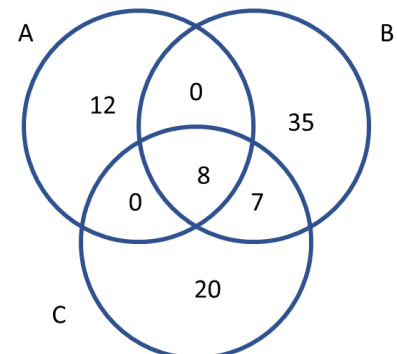


Oefening 8.7. Een bepaalde opleiding organiseert in de augustuszittijd examens voor drie vakken. Voor vak A zijn er 20 studenten ingeschreven, voor vak B 50, voor vak C 35. 8 studenten moeten alle drie de vakken afleggen. 12 studenten hoeven enkel vak A af te leggen, 20 studenten enkel vak C. Hoeveel studenten moeten enkel vak B afleggen? Hint: gebruik een Venndiagram.

Gegeven:

$$|A| = 20, |B| = 50, |C| = 35, |A \cap B \cap C| = 8, |A| - |B \cup C| = 12 \text{ en } |C| - |A \cup B| = 20$$

Gebruikmakend van venndiagram kan er stapsgewijs informatie worden aangevuld en dan bekomt men dat er in totaal 35 studenten zijn die enkel vak B moeten volgen.



Oefening 8.8. (uitdaging) Zij a een rij van n elementen $a[i]$, waarbij elke $a[i]$ een object van type *Verzameling* is. Zij gegeven een methode *doorsnede*(*Verzameling*, *Verzameling*) die de doorsnede van 2 verzamelingen teruggeeft, en een methode *kard*(*Verzameling*) die het aantal elementen van een verzameling teruggeeft. Definieer een methode die het aantal elementen in de unie van alle $a[i]$ uitrekent via het inclusie-exclusie-principe.

...

Oefening 8.9. Bewijs de voorgaande stelling. Hint: gebruik inductie op k .

Basisstap: $k = 2$

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$$

(gegeven)

Inductiestap: $k \Rightarrow k + 1$

Hypothese: $|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k|$

stel $B = |A_1 \times \dots \times A_k|$

Bewijs:
$$\begin{aligned} |A_1 \times \dots \times A_k \times A_{k+1}| &= |B \times A_{k+1}| \\ &= |B| \cdot |A_{k+1}| \\ &= |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k| \cdot |A_{k+1}| \end{aligned}$$

Oefening 8.10. Een spel kaarten bevat kaarten in vier “kleuren” (klaveren, schoppen, harten en ruiten) en 13 rangen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, D, H). Als elke rang in elke kleur bestaat, hoeveel kaarten zijn er in totaal?

$|kleuren| \times |rang\text{en}| = 4 \times 13 = 52$
Er zijn dus 52 kaarten in totaal.

Oefening 8.11. Een nummerplaat bevat eerst 3 letters, dan 3 cijfers. Hoeveel verschillende nummerplaten kunnen er gevormd worden?

$|cijfers| \times |cijfers| \times |cijfers| \times |letters| \times |letters| \times |letters| = 10 * 10 * 10 * 26 * 26 * 26$
 $= 17.576.000$
Er zijn dus 17.576.000 mogelijke nummerplaten.

Oefening 8.12. Bij hexadecimale notatie van getallen worden 16 cijfers gebruikt (0-9 en A-F). Hoeveel verschillende getallen kunnen er met 4 hexadecimale cijfers voorgesteld worden? (ga ervan uit dat een getal met het cijfer 0 mag beginnen, dus 0000, 0001, etc. tellen ook mee.)

$|hexadecimaal| \times |hexadecimaal| \times |hexadecimaal| \times |hexadecimaal| = 16 * 16 * 16 * 16$
 $= 65.536$
Er zijn dus 65.536 verschillende notaties met 4 hexadecimale cijfers mogelijk.

Oefening 8.13. In een groep van 10 mannen en 8 vrouwen zijn er gisteren twee mensen getrouwd, maar je weet niet welke. Hoeveel mogelijke antwoorden zijn er op de vraag wie gisteren met wie getrouwd is,

- als je weet dat het een heterohuwelijk is?
- als je weet dat het een homohuwelijk is (twee mannen of twee vrouwen)?

a) $|mannen| \times |vrouwen| = 10 \times 8 = 80$. Er zijn dus 80 mogelijkheden.
b) $(|mannen| \times |mannen| - 1 + |vrouwen| \times |vrouwen| - 1)/2 = (10 * 9 + 8 * 7)/2 = 73$. Er zijn dus 73 mogelijkheden. Merk op dat we hier door twee delen, want als persoon A met persoon B trouwt dit hetzelfde is als persoon B met persoon A. We trekken hier ook steeds 1 af van het tweede gedeelte, omdat een persoon niet met zichzelf kan trouwen.

Oefening 8.14. Een alternatief bewijs berust op de volgende redenering. Beschouw een willekeurige verzameling A met $|A| = n$. Definieer een bijectie tussen $P(A)$ en $\{0,1\}^n$. Aangezien wegens Gevolg 8.1 $|\{0,1\}^n| = 2^n$, geldt dan ook $P(A) = 2^n$.

...

Oefening 8.15. Wat is de kardinaliteit van de verzameling functies van A naar B ? Merk op dat, als f een functie is, er voor elke $x \in A$ een bijkomende mogelijkheid is voor $f(x)$: $f(x)$ kan gelijk zijn aan een van de elementen van B , of $f(x)$ kan ongedefinieerd zijn.

$(|B| + 1)^{|A|}$
Hier baseren we ons op het feit dat een afbeelding als kardinaliteit $|B|^{|A|}$. Nu komt er één extra optie bij (naar niets) waar A naartoe kan verwijzen. Daarom is het nodig om $|B| + 1$ te nemen.

Oefening 8.16. 10 studenten mogen uit 5 mogelijke vakken 1 keuzevak kiezen. Hoeveel verschillende keuzes kan de groep studenten als geheel maken? (Twee keuzes wordt als verschillend beschouwd als er minstens 1 student een ander vak gekozen heeft).

5^{10} (aantal keuzes)^(aantal personen)

Er zijn dus in totaal 9.765.625 mogelijkheden.

Oefening 8.17. 10 studenten mogen uit 5 mogelijke vakken 2 keuzevakken kiezen. Hoeveel verschillende keuzes kan elke student maken? Hoeveel verschillende keuzes kan de groep studenten als geheel maken?

$$10^{10} \quad (10 \text{ omdat: } 5 \cdot 4/2)$$

Er zijn dus in totaal 10.000.000.000 mogelijkheden.

Oefening 8.18. 5 kinderen staan in de rij voor de botsauto's op de kermis. Er zijn 10 botsauto's. Als je ervan uitgaat dat elk kind in een apart botsautootje kiest, op hoeveel verschillende manieren kunnen de kinderen plaatsnemen?

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{10!}{5!} = 30.240 \quad \text{met } n = 10, m = 5$$

Oefening 8.19. Er staan 5 mensen en 5 auto's buiten. Elke auto hoort toe aan 1 persoon. Als je kunt raden welke auto van wie is, win je een prijs. Hoeveel mogelijkheden zijn er om uit te kiezen?

$$5! = 120$$

Er zijn dus 120 mogelijkheden.

Oefening 8.20. 5 vrienden houden een fietswedstrijd. In hoeveel verschillende volgordes kunnen ze aankomen bij de eindstreep?

$$5! = 120$$

Er zijn dus 120 mogelijkheden.

Oefening 8.21. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de vier Daltonbroers van links naar rechts op een rij gezet worden?

$$4! = 24$$

Er zijn dus 24 mogelijkheden.

Oefening 8.22. In een loterij mag je 6 getallen aankruisen op een formulier met 45 getallen. Het maakt niet uit in welke volgorde de kruisjes gezet worden. Op hoeveel verschillende manieren kan je het formulier invullen?

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{45!}{6!39!} = 8.145.060$$

Er zijn dus 8.145.060 mogelijke lotto combinaties.

Oefening 8.23. Vergelijk de manier waarop de breuken opgelijst worden met de manier waarop buspassagiers opgelijst worden in het Hilbert-hotel. Welke situatie bij het Hilbert-hotel komt hiermee overeen?

Oneindig veel bussen plaatsen (laatste stap).

Oefening 8.24. Zij A een eindige verzameling. De verzameling van alle eindig lange rijen van elementen van A (ook wel strings over A genoemd) heeft kardinaliteit $\aleph_0$. Bewijs dit door een manier voor te stellen om alle dergelijke rijen op te sommen.

Je kan iedere mogelijke unieke rij bekomen door ieder element van A minstens 1 keer te gebruiken op iedere 'plaats' binnen de rij. Wanneer je al je mogelijke combinaties hebt uitgeprobeerd, voeg je gewoon 1 nieuwe plaats toe aan de volgende rij.

Beeld je in dat A het alfabet en alle leestekens bevat, dan is de verzameling van alle rijen $\{a,b,c,\dots,aa,ab,ac,\dots\}$.

Stel dat we als A de waardes van een bit nemen, dan is de verzameling van alle rijen $\{0,1,01,10,11,001,\dots\}$.

Voor de rest van de oefening beschouwen we A als de singleton $\{1\}$.

Maak voor ieder getal n uit $\mathbb{N}$ een nieuwe rij aan met n keer het getal 1 in.

A is eindig want het bevat enkel het getal 1, iedere rij is eindig want ieder getal in $\mathbb{N}$ op zich heeft een vaste waarde (al zij het 100 of 100.000.000.000 het getal zelf is nooit 'oneindig') en dus zit er een eindig aantal elementen in iedere rij.

Er zijn wel evenveel van deze rijen te maken als er getallen zijn in $\mathbb{N}$, namelijk $\aleph_0$.

Oefening 8.25. Een functie f van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ kan gedefinieerd worden als een oneindige rij getallen a_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ waarbij $a_i = f(i - 1)$. Toon aan dat het onmogelijk is om alle functies op te lijsten.

M.a.w.: de verzameling functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is onaftelbaar.

We kunnen dit bewijzen dmv het diagonaalargument van Cantor.

We verzinnen een verzameling functies 'fn' van $i \in \mathbb{N}$ naar $a_i \in \mathbb{N}$.

We zeggen dat $a_i \in f_n$ de waarde $n + (i - 1)$ heeft. Het is duidelijk dat er in deze verzameling functies evenveel functies 'fn' zitten als er getallen in $\mathbb{N}$ zitten, namelijk $\aleph_0$. Het is ook duidelijk dat iedere functie op zich een verzameling is van $\aleph_0$ elementen 'ai'.

Als nu een functie f' maken door het eerste element uit f_1 , het 2e element uit f_2 , etc. te nemen, bekomen we een nieuwe functie die aan geen enkele functie f_n gelijk is en dus niet binnen de huidige $\aleph_0$ grote verzameling f_n ligt. Deze nieuwe functie is geen speciale functie, we kunnen er oneindig veel nieuwe bedenken op deze manier, we kunnen bijvoorbeeld een functie maken die start met het eerste element van f_2 en zo diagonaal verder gaat (de diagonaal 1tje naar beneden verschuiven), of we kunnen de diagonaal sneller doen dalen door het eerste element van f_1 , het 2e element van f_3 enz. te nemen. Dit wil zeggen dat er meer dan $\aleph_0$ functies zijn $\Rightarrow$ onaftelbaar.

$$a_i \in f_n = n + (i - 1)$$

	a1	a2	a3	...
f1	1	2	3	$f_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$
f2	2	3	4	$f_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$
f3	3	4	5	$f_3 = \{3, 4, 5, \dots\}$
...	$f' = \{1, 3, 5, \dots\}$			

Oefening 8.26. Een computerprogramma is steeds een eindige rij tekens uit een eindig alfabet. Toon aan dat de verzameling van alle computerprogramma's aftelbaar oneindig is.

Ieder programma is te herleiden naar bits.

Een programma is dus een eindige rij van elementen uit een eindige verzameling $\{0, 1\}$.

We kunnen $\aleph_0$ verschillende programma's maken, zie oefening 8.24.

Aangezien het aantal programma's dus 'aftelbaar' is en we in de vorige oefening aantoonde dat het aantal functies 'overaftelbaar' (of 'onaftelbaar') is, kunnen we besluiten dat we niet iedere functie kunnen programmeren.

Oefening 8.27. Interpreteer deze rekenregels in de context van het Hilbert-hotel.

- Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: $n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt: $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.

- Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt: $\aleph_0^n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n > 1$ geldt: $n^{\aleph_0} \geq \aleph_0$.
- Het aantal deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.
- Het aantal functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$.

- a) Nog meer toeristen
- b) Een oneindige bus erbij
- c) Oneindig veel oneindige bussen
- d) ?
- e) ?
- f) ?

Oefening 8.28. Aan een paardenkoers doen 10 paarden mee. Je mag een gokje wagen over de top 3. Hoeveel mogelijke uitkomsten voor de top 3 zijn er

- als de volgorde uitmaakt?
- als de volgorde niet uitmaakt?

- a) $\frac{10!}{7!} = 720$. Er zijn dus 720 mogelijkheden.
- b) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$. Er zijn dus 120 mogelijkheden.

Oefening 8.29. In een doos zitten 5 witte ballen (we noemen ze bal 1, 2, 3, 4, 5) en 6 zwarte ballen (die we a, b, c, d, e, f noemen). Bij een “trekking” neem je willekeurig een aantal ballen uit de doos; de “uitkomst” is een deelverzameling van de ballen in de doos (we gaan er dus van uit dat de volgorde waarin je ze neemt niet uitmaakt); bv. een mogelijke uitkomst, als je 4 ballen trekt, is $\{a, e, 1, 3\}$.

- Iemand neemt 3 ballen uit de doos. Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er?
- Als je één bal uit de doos neemt, hoeveel uitkomsten zijn er dan waarbij die bal zwart is?
- Als je twee ballen uit de doos neemt, hoeveel uitkomsten zijn er dan waarbij ze allebei wit zijn?
- Als je 3 ballen neemt, hoeveel uitkomsten zijn er dan waarbij er 1 zwart is en de andere 2 wit?

- a) Er zijn 11 ballen in totaal. $\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} = 165$
- b) 6
- c) $\binom{5}{2} = 10$
- d) $\binom{6}{1}\binom{5}{2} = 60$