Theorie Kansrekenen 1

Estelle Severs

2020-2021

Inhoudsopgave

1 Kansruimten

1.1 Basisbegrippen

Def: Een klasse $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van Ω heet een **Sigma-algebra** (of σ-algebra) over het universum Ω als $\mathcal{A}$ voldoet aan de volgende drie axioma's

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Als $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$
3. Als $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

In dit geval zegt men ook dat het koppel $(\Omega,\ \mathcal{A})$ een **meetbare ruimte** vormt. De elementen van $\mathcal{A}$ worden **gebeurtenissen** genoemd.

Def: Een functie $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ wordt een **kansmaat** genoemd indien

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall A \in \mathcal{A}$ geldt $P(A) \geqslant 0$
3. Als $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}en\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$ (onderling of paarsgewijs disjunct), dan
$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$
Dit derde axioma noemt men het axioma van de **aftelbare additiviteit**, ook wel **σ-additiviteit** genoemd.

Een **kansruimte** is een drietal $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bestaande uit het universum Ω, een σ-algebra $\mathcal{A}$ en een kansmaat P over Ω.

Def: Een rij verzamelingen $A_n, n \in \mathbb{N}_0$ heet **stijgend** (notatie $A_n \uparrow$), wanneer voor elke $n \in \mathbb{N}$geldt dat$A_n \subset A_{n+1}$. Een rij heet **dalend** ($A_n \downarrow$) als $A_n \supset A_{n+1}$. Een rij heet **monotoon**, als $A_n \uparrow$ of$A_n \downarrow$. We schrijven

$$\lim_{n\to\infty} = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{als} A_n \uparrow \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{als} A_n \downarrow \end{cases} \tag{1}$$

Stelling: Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte.

1. **Eindige additiviteit**

   Als $\{A_n | n \in \{1, ..., N\}\}$ paarsgewijs disjunct zijn een $\forall n \in \{1, ..., N\}, A_n \in \mathcal{A}$ dan

   $$P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

2. $\forall n \in \mathcal{A} : P(A^C) = 1 - P(A)$

   In het bijzonder geeft dit dat $P(\emptyset) = 0$

3. Als $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A_n \in \mathcal{A}$ en de rij (A_n) is monotoon, dan is

   $$P(\lim_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Bewijs -blijkbaar op de slides te vinden?-

Def: Zij $\mathcal{C} \subset 2^\Omega$ een collectie deelverzamelingen van een universum. De σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{C}$ (indien deze bestaat) is de kleinste σ-algebra die $\mathcal{C}$ bevat, dwz:

- $\sigma(\mathcal{C}) is een \sigma - algebra$
- $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$
- $\forall$ σ-algebra $\mathcal{A}$ met $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} : \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$

Uit deze eis volgt onmiddellijk dat als de σ-algebra bestaat, hij ook uniek is: wanneer er twee zouden zijn kan je uit deze laatste eis bekomen dat de ene deel moet uitmaken van de andere, en de 2 inclusies geven een gelijkheid. Daarom is het toegelaten te spreken van 'de' kleinste σ-algebra .

Voor elke collectie van deelverzamelingen $\mathcal{C} \subset \Omega bestaat \sigma(\mathcal{C})$, de σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{C}$.

Bewijs. Beschouw de collectie

$$\mathcal{E} := \{\mathcal{A} \in \mathcal{D}(\Omega) | \mathcal{A}\sigma - \text{algebra}, \mathcal{A} \supset \mathcal{C}\}$$

Merk op dat $\mathcal{E}$, een verzameling van σ-algebras, niet leeg is omdat de machtsverzameling $\mathcal{D}(\Omega)$ altijd een σ-algebra is en dus tot de collectie $\mathcal{E}$ behoort. Het enige wat we nu nog moeten doen is uit $\mathcal{E}$ de kleinste σ-algebra selecteren. Bekijk hiervoor

$$\mathcal{B} := \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{E}} \mathcal{A}$$

de doorsnede van alle σ-algebras in $\mathcal{B}$. Het spreekt voor zich dat $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$. We tonen nu aan dat ook $\mathcal{B}$ zelf een σ-algebra is. We tonen dat $\mathcal{E}$ stabiel is onder complementen: als $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$, dan behoort $\mathcal{A}$ ook tot $\mathcal{A}$ voor alle $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$. In al deze σ-algebras bestaat ook het complement A^C , dus dat complement zit dan ook in de doorsnede. De andere eigenschappen bewijzen gaat op een analoge manier, dus kunnen we besluiten dat $\mathcal{B}$ de gezochte σ-algebra $\sigma(\mathcal{C})$ is.

1.2 Voorwaardelijke kans en onafhankelijkheid

Def: De **voorwaardelijke** (conditionele) kans van een gebeurtenis A, gegeven dan een gebeurtenis B met kans P(B) $\neq$ 0 is opgetreden, is

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Merk op dat P(A|A) = 1 en $P(A|\Omega) = P(A)$

Stelling: Zij (Ω, $\mathcal{A}$, P) een kansruimte en $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, waarvoor $P(B) > 0$. Dan definieert

$$\begin{aligned} P_B &= \mathcal{A} \to \mathbb{R} \\ &= A \rightarrowtail P(A|B) \end{aligned} \tag{2}$$

een kansmaar op $\mathcal{A}$.

Bewijs. We bewijzen dat P_B voldoet aan de drie voorwaarden

1. $P_B(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$

2. $\forall A \in \mathcal{A} : P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$

3. Zij $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, paarsgewijs disjunct. Dan is

$$\begin{aligned} P_B(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \frac{P((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n) \end{aligned} \tag{3}$$

Stelling: Kettingregel
Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte. Zij $(A_n)_{n=1}^{k} \in \mathcal{A}met2 \leq k \in \mathbb{N}$ dan geldt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_k|A_1 \cap ... \cap A_{k-1})$$

Bewijs. We geven een bewijs per inductie. Voor k = 2 volgt uit de definitie van voorwaardelijke kans dat

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1)$$

Stel dat de eigenschap bewezen is voor l. We moeten dan de eigenschap aantonen voor l+1

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{l+1}) &= P((A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_l) \cap A_{l+1}) \\ &= P(A_{l+1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_l)P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_l) \end{aligned} \tag{4}$$

en gebruikmakend van het resultaat voor l kunnen we het bewijs afsluiten.

Stelling: Wet van total kans Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte en zij $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een partitie van Ω met alle $P(A_n) \neq 0$, dan gelt voor iedere gebeurtenis B $\in \mathcal{A}$

$$P(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)P(B|A_n)$$

Bewijs. Aangezien $B = B \cap \Omega$ en $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, hebben we dat

$$B = B \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B \cap A_n)$$

Nu zijn de gebeurtenissen $(B \cap A_n), n \in \mathbb{N}$, paarsgewijs disjunct en dus

$$P(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B \cap A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B|A_n)P(A_n)$$

Stelling van Bayes
Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte en zij $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een partitie van Ω met alle $P(A_n) \neq 0$. Zijn $B \in \mathcal{A}$ een gebeurtenis met $P(B) \neq 0$ dan is voor iedere n

$$P(A_n|B) : \frac{P(A_n)P(B|A_n)}{\sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k)P(B|A_k)}$$

Bewijs. Het bewijs volgt onmiddelijk uit de definitie van voorwaardelijke kans en de wet van de totale kans.

Def: Twee gebeurtenissen A, B $\in \mathcal{A}$ zijn **onafhankelijk**

$$\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Def: Een familie van gebeurtenissen $A_1, ..., A_n (n \geq 2)$ heet **paarsgewijs onafhankelijk** indien elk tweetal van verschillende gebeurtenissen uit de rij onafhankelijk is.

Def: Een familie gebeurtenissen $A_1, ..., A_n (n \geq 2)$ heet **onderling onafhankelijk** indien voor elke $m = 2, ..., n$ en voor elke keuze van m verschilende indices $i_1, ..., i_m \text{uit} 1, ..., n$ gelt

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{im}) = P(A_{i1})P(A_{i2})...P(A_{im})$$

2 Stochastische veranderlijken

2.1 Inleiding en definitie

Def: ZIj $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kasnruimte, dan heet een reële functie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die aan elke uitkomst $\omega \in \Omega$ een reëel getal $X(\omega)$ toekent, een **stochastische veranderlijke** (s.v) indien

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(B) = \{\omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

We zeggen dan dat X en **$\mathcal{A}$-meetbare afbeelding** is.

Stelling: Zij $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$$\mathcal{X}\text{is een s.v.} \iff \forall a \in \mathbb{R} : \mathcal{X}^{-1}(]-\infty, a]) = \{\omega | \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$$

\- geen bewijs -

Stelling: $\mathcal{X}$ induceert een **kansmaat** op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:
Deze kansmaat noeteren we met $P_X(B)$ of $P(X \in B)$

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Dus

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\})$$

We schrijven

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$$

Voor elke stochastische veranderlijke X is $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X$ een **kansruimte**.

Bewijs.

1. We hebben dat

$$P_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$$

2. We moeten aantonen dat

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P_X(B) \geq 0$$

Neem nu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ willekeurig. Dan is

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) \geq 0$$

3. Voor $B_1, B_2, ...$ paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} P_X(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) &= P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\}) \\ &= P(\{\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B_j\}\}) \qquad (5) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B_j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} P_X(B_j) \end{aligned}$$

Def: Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte. Wanneer $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een stochastische veranderlijke is, dan definieert men de overeenkomstige **verdelingsfunctie** F_X (de *cumulatieve verdelingsfunctie* of *cdf*) als

$$F_X(a) = X(]-\infty, a]) = P(\{\omega | X(\omega) \leq a\}) = P(X \leq a), a \in \mathbb{R}$$

Stelling: Zij X een s.v. gedefinieerd op $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en F_X de bijbehorende verdelingsfunctie, dan gelt:

1. F_X is **monotoon stijgend**: $\forall a \leq b : F_X(a) \leq F_X(b)$
2. $\lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$en $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$
3. F_X is **rechtscontinu**, d.w.z

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} F_X(a+h) = F_X(a)$$

Bewijs. Ga zelf na (ugh)

Def: De **kwantielfunctie** Q_X is de inverse functie van de verdelingsfunctie F_X. De waarde $Q_X(p)$ is de kleinste waarde a waarvoor $F_X(a) \geq p$ met $0 < p \leq 1$. Deze waarde wordt ook het p-kwantiel of 100p-percentiel genoemd.

2.2 Types stochastische veranderlijken

Def: Een rij waarden $\{x_j | j \in \mathbb{N}\}$ en een rij constanten $\{p_j | j \in \mathbb{N}\}$ geven een **discrete verdeling** als en slechts als

$$\forall j \in \mathbb{N} : p_j \geq 0 \text{ en } \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j = 1$$

Def: Wanneer F_X continu afleidbaar is, kan men de **dichtheidsfunctie** (df, kansdichtheid of densiteit) definiëren als de afgeleide van de verdelingsfunctie:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} F'_X(x)$$

2.3 Momenten van stochastische veranderlijken

Def: Gegeven de kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Als $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een s.v. is met verdelingsfunctie F_X, dan definieert men de **verwachtingswaarde** van X als

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) = \begin{cases} \sum_j x_j p_j & \text{(discrete } F_X) \\ \int_{-\infty}^{*\infty} x f_X(x) dx & \text{(continue} F_X) \end{cases} \tag{6}$$

indien

$$\begin{cases} \sum_j \left| x_j \right| p_j < \infty & \text{(discrete} F_X) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x \right| dF_X(x) < \infty & \text{(continue} F_X) \end{cases} \tag{7}$$

Soms noemen we dit getal ook het populatiegemiddelde of de verwachte waarde van X (de letter E komt van *Expected value*)

Eigenschap: met a een constante $\neq 0$ en b een constante.

$$\begin{aligned} E[aX] &= aE[X] \\ E[X+b] &= E[X] + b \\ E[b] &= b \\ \big|E[X]\big| &\leq E\|X|] \end{aligned} \tag{8}$$

Bewijs zelf na te gaan (ugh)

Def: De **variantie** van X gegeven door

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] \geq 0$$

welke bestaat wanneer het rechterlid eindig is. In dit geval definieert men ook de **standaardafwijking** van X als $\sqrt{Var[X]}$

Eigenschap: met in het eerste geval a constant en $\neq 0$, in het tweede geval $a = -1$ en in de andere gevallen b gewoon constant.

$$\begin{aligned} Var[aX] &= a^2 Var[X] \\ \Rightarrow Var[-X] &= Var[X] \\ Var[X+b] &= Var[X] \\ Var[b] &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

-Ga dit zelf na-

Eigenschap: Als X en Y s.v. zijn op $(\Omega\mathcal{A}, P)$, dan geldt dat

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

(vooropgesteld natuurlijk dat linker- en rechterlid bestaat)

Bewijs. We bewijzen deze eigenschap enkel in het speciale geval waar $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ aftelbaar is. zie p 44 voor verdere uitwerking.. nog geen idee hoe ik dit in latex zet.

Def: De s.v. X en Y op $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heten **onafhankelijk** als "Voor alle gebeurtenissen A en B van $\mathbb{R}$ zijn $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$ en $\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \in B\}$ onafhankelijk"wa equivalent is met

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

met $\forall A, B \in \mathcal{A}$ wat op zijn beurt gelijkwaardig is met

$$P((X \leq a) \cap (Y \leq b)) = P(X \leq a)P(Y \leq b)$$

met $\forall a, b \in \mathbb{R}$. (dit bereikt men door $A =]-\infty, a]$ en $B =]-\infty, b]$ te nemen).

Eigenschap: Indien X en Y **onafhankelijk** zijn, dan geldt ook:

1. $E[XY] = E[X]E[Y]$
2. $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$
3.
$$\begin{aligned} Var[XY] &= Var[X]Var[Y] + E[X]^2 Var[Y] + Var[X]E[Y]^2 \\ &\geq Var[X]Var[Y] \end{aligned} \tag{10}$$

Bewijs.

1. We geven het bewijs voor het discrete geval
$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{j,k} x_i y_k P(X = x_j \cap Y = y_k) \\ &= \sum_j \sum_k x_j y_k P(X = x_j)P(Y = y_k) \\ &= (\sum_j x_j P(X = x_j))(\sum_k y_k P(Y = y_k)) \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned} \tag{11}$$

2. Voor de variantie van X + Y bekomen we

$$\begin{aligned}
Var[X+Y] &= E[(X+Y-E[X+Y])^2] \\
&= E[(X+Y-(E[X]+E[Y]))^2] \\
&= E[((X-E[X])+(Y-E[Y]))^2] \\
&= E[(X-E[X])^2]+E[(Y-E[Y])^2]+2E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= Var[X]+Var[Y]+2E[X-E[X]]E[Y-E[Y]] \\
&= Var[X]+Var[Y]+2(E[X]-E[X])(E[Y]-E[Y]) \\
&= Var[X]+Var[Y]
\end{aligned} \tag{12}$$

3. Linker- en rechterlid uitwerken en termen vergelijken.

Stelling: Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte en X een willekeurige s.v. gedefinieerd op Ω. Dan geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E\|X|] \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

We kunnen dus besluiten dat $E\|X|] < \infty$ enkel en alleen indien de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$ convergeert.

Bewijs. We bewijzen deze stelling voor een continue s.v. (geef zelf het bewijs voor het geval van een discrete s.v.).
Beschouw de volgende partitie van $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[= \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Waarbij $A_n = \{x|x \in \mathbb{R}, |x| \in [n, n+[\}$ voor n = 0, 1, 2, ...
We zien dus dat

$$\begin{aligned}
A_0 &=]-1,0] \cup [0,1[=]-1,1[\\
A_1 &=]-2,-1] \cup [1,2[\\
A_2 &=]-3,-2] \cup [2,3[
\end{aligned} \tag{13}$$

Of kortweg:

$$A_n =]-(n+1), -n] \cup [n, n+1[$$

.
We bekomen

$$E\|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x|\, f_X(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x \in A_n} |x|\, f_X(x)dx$$

.
Indien nu $x \in A_n$, dan geldt:

$$n \leqslant |x| < n+1 \Rightarrow n\mathbb{1}_{A_n}(x) \leqslant |x|\,\mathbb{1}_{A_n}(x) \leqslant (n+1)\mathbb{1}_{A_n}(x)$$

We vinden dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int n\mathbb{1}_{A_n}(x) f_X(x)dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int |x|\,\mathbb{1}_{A_n}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+1)\mathbb{1}_{A_n}(x) f_X(x-dx)$$

Aangezien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_n}(x) f_X(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} P(X \in A_n) = P(X \in \mathbb{R}) = 1,$$

bekomen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP(X \in A_n) \leq E[\![X|] \leq \sum_{n=0}^{\infty} nP(X \in A_n) + 1$$

Ten slotte tonen we aan dat $\sum_{n=0}^{\infty} nP(W \in A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty})\{|X| \in [m, m+1[\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(\{|X| \in [m, m+1[\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(X \in A_m) \qquad (14) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P(X \in A_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} mP(X \in A_m)
\end{aligned}$$

Stelling: Zij X een s.v., indien $E[\![X|^n]$ bestaat (i.e. $E[\![X|^n] < \infty$) dan bestaat $E[\![X|^k]$voor$0 \leq k \leq n$.

Bewijs. Vermits $E[\![X|^k] < \infty$ geldt bijgevolg ook dat $E[X^n] < \infty$. We leveren het bewijs in het geval van een continue s.v. met dichtheidsfunctie *f*. We hebben

$$
\begin{aligned}
E[|X|^k] &= \int_{-1}^{1} |x|^k f(x)dx + \int_{|x|>1} |x|^k f(x)dx \\
&\leq \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{|x|>1} |x|^n f(x)dx \\
&\leq 1 + E[|X|^n]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

met $(0 \leq k \leq n)$, wat dus eindig is wegens de veronderstelling.

Gevolg: Zij X een positieve s.v. die alleen gehele waarden kan aannemen. Dan

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

Stelling Ongelijkheid van Chebyshev
Zij X een s.v. en $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zodanig dat $\phi(X)$ is een s.v. is en $E[\phi(X)]$.

1. Indien $\phi \geq 0$, even (d.w.z. $\forall x : \phi(-x) = \phi(x)$) en niet-dalend voor $x \geq 0$, dan geldt:

$$\forall a \geq 0 : P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{\phi(a)} E[\phi(X)].$$

2. Indien $\phi \geq 0$ en niet dalend voor $-\infty < x < +\infty$, dan geldt

$$\forall a \in \mathbb{R} : P(X \geq a) \leq \frac{1}{\phi(a)} E[\phi(X)].$$

Bewijs. We leveren het bewijs voor een continue s.v. met dichtheidsfunctie f_X.

1. Bereken die verwachtingswaarde

$$\begin{aligned}
E[\phi(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{-a} \phi(x) f_X(x)dx + \int_{-a}^{a} \phi(x) f_X(x)dx + \int_{a}^{\infty} \\
&\geq \phi(-a) \int_{-\infty}^{-a} f_X(x)dx + \phi(a) \int_{a}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= \phi(a)[\int_{-\infty}^{-a} f_X(x)dx + \int_{a}^{\infty} f_X(x)dx] \\
&= \phi(a)P(|X| \geq a).
\end{aligned} \tag{16}$$

2. We vinden

$$\begin{aligned}
E[\phi(X)] &= \int_{-\infty}^{-a} \phi(x) f_X(x)dx + \int_{-a}^{a} \phi(x) f_X(x)dx + \int_{a}^{\infty} \phi(x) f_X(x)dx \\
&\geq \int_{a}^{\infty} \phi(x) f_X(x)dx \\
&\geq \phi(a) \int_{a}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= \phi(a)P(X \geq a).
\end{aligned} \tag{17}$$

Gevolg: Indien X een s.v. is met $E[|X|^n] < \infty, n > 0$ dan geldt

$$\forall a > 0 : P(|X| \geq a) \leq a^{-n} E[|X|^n].$$

Indien X een s.v. is met $E[X] = \mu$ en $Var[X] = \sigma^2 < \infty$ dan geldt

$$\forall a > 0 : P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Def: Voor elk natuurlijk getal $k \geq 1$ definieert men het ruwe moment van k als

$$\alpha_k(X) = E[X^k]$$

en het centrale moment van orde k als

$$\mu_k(X) = E[(X - E[X])^k]$$

Def: De **momentgegenereerde functie** (MGF) van X is bepaald als

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \begin{cases} \sum_j e^{tx_j} p_j & (discreet) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx & (continu) \end{cases} \tag{18}$$

(als die bestaat) voor elke $t \in \mathbb{R}$

Eigenschap: Als X en Y onafhankelijk zijn, dan geldt

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

$\forall t$.

Bewijs.

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] \\ &= E[e^{tX}e^{tY}] \\ &= E[e^{tX}]E[e^{tY}] \\ &= M_X(t)M_Y(t) \end{aligned} \tag{19}$$

□

2.4 Kentallen

Gemiddelde.

$$\mu x = E[X] \begin{cases} \sum_j x_j p_j & \text{indien F discreet is} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \text{indien F continu is.} \end{cases} \tag{20}$$

Mediaan. $Med(X) =$

1. $F^{-1}(\frac{1}{2})$ als er juist één x bestaat zodat $F(x) = \frac{1}{2}$,
2. het punt waar F een discontinue sprong maakt van $< \frac{1}{2}$naar $> \frac{1}{2}$ als er géén bestaat zodat $F(x) = \frac{1}{2}$
3. het middelpunt van het interval waarop $F(x) = \frac{1}{2}$ als er meerdere x bestaan zodat $F(x) = \frac{1}{2}$

Variantie

$$\sigma^2 = Var[X] \begin{cases} \sum_j (x_j - \mu)^2 p_j & \text{indien P discreet is} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx & \text{indien P continu is.} \end{cases} \tag{21}$$

Standaardafwijking: $sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Interkwartiel: $IQR = F^{-1}(\frac{3}{4}) - F^{-1}(\frac{1}{4})$
Median absolute deviation: $MAD = Med\big|X = Med(X)\big|$

2.5 Belangrijke verdelingen

Def: De **discrete uniforme verdeling** is steeds gedefinieerd op een eindig universum $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$. Dan is

$$p_j = P(\{x_j\}) = \frac{1}{n}$$

$j = 1, ..., n$.

Def: Voor X een **Bernoulli verdeelde** s.v. is $\Omega = \{0, 1\}$ en zijn de kansen gedefinieerd als

$$\begin{cases} P(X = 1) = p & kansopsucces \\ P(X = 0) = q = 1 - p & kansopmislukking \end{cases} \tag{22}$$

met $0 < p < 1$. We noteren dit als

$$X \sim \mathcal{B}(1, p).$$

Def: Voor onderling onafhankelijke s.v. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p), i = 1, ..., n$ is de s.v. $Y = X_1 + ... + X_n$ **binomiaal verdeeld** met parameters n en p. We noteren dan

$$Y \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Bijgevolg is $\Omega = \{0, 1, ..., n\}$ en

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Def: De s.v. zoals hierboven beschreven is **geometrisch verdeeld** met parameter p. Voor deze verdeling is het universum $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$ en zijn de kansen gelijk aan

$$P(X = j) = g^j p$$

$\forall j \in \Omega$. We noteren

$$X \sim Geom(p).$$

Def: De **negatief binomiaalverdeling** met parameters $r \geq 1$ en $0 < \theta < 1$ heeft als universum $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$ en wordt gekarakteriseerd door de kansen:

$$P(X = j) = \binom{j + r - 1}{j}(1 - \theta)^r \theta^j.$$

We noteren deze verdeling als

$$X \sim NB(r, \theta).$$

Def: De s.v. zoals hierboven geconstrueerd is **hypergeometrisch verdeeld**, heeft als universum $\Omega = \{, 1, 2, ..., n\}$ en de bijhorende kansen zijn, voor j$\in\mathbb{N}$ met $max(0, n - (N - s)) \leq j \leq min(s, n)$:

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \frac{\binom{s}{j}\binom{N-s}{n-j}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{(\#man.omjwittetetrekken)(\#man.om(n-j)zwartetetrekken)}{(\#manierenomnknikkerstetrekken)} \end{aligned} \tag{23}$$

We noteren dit als

$$Y \sim \mathcal{H}(N, s, n).$$

Def: De **Poissonverdeling** $\mathcal{P}(\alpha)$ met parameter $0 < \alpha < \infty$ is gedefinieerd op $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$ door

$$p_j = P(X = j) = \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}.$$

Def: De s.v. X volgt een **continue uniforme verdeling** op $[a, b]$ met $-\infty < a < b < +\infty$, genoteerd als $X \sim \mathcal{U}[a, b]$, als X de volgende dichtheid heeft:

$$f_{a,b}(x) : \frac{1}{b - a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

Def: De **exponentiële verdeling** met parameter $\alpha(0 < \alpha < \infty)$ wordt gedefinieerd door haar dichtheidsfunctie

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{24}$$

We schrijven

$$X \sim \mathcal{E}(\alpha)$$

Def: De **standaard normale verdeling** $\mathcal{N}(0,1)$ is gedefinieerd door de dichtheidsfunctie

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Een s.v. die standaard normaalverdeeld is, wordt genoteerd met de letter Z.

De *verdelingsfunctie* van $\mathbb{N}(0,1)$ wordt genoteerd als

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt.$$

Def: De **algemene normale verdeling** met $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ is de verdeling van $X = \sigma Z + \mu \text{waarbij} Z \sim \mathbb{N}(0,1)$. We noteren dit als

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

De dichtheidsfunctie is dan:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Def: Laat $Z_1, Z_2, ..., Z_n (n \geq 1)$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$-verdeeld zijn, dan noemt men de verdeling van

$$X = Z_1^2 + ... + Z_n^2$$

een **chi-kwadraat verdeling met n vrijheidsgraden** en schrijft men

$$X \sim X_n^2.$$

De dichtheidsfunctie is gegeven door

$$f_{X_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} T(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{25}$$

Def: De **gammaverdeling** met parameters $\gamma > 0$ en $\beta > 0$ is gedefinieerd door de dichtheidsfunctie

$$f_{\gamma,\beta}(x) = \frac{x^{\gamma-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\gamma T(\gamma)} \mathbb{1}_{x>0}$$

Hierin bepaalt γ de vorm (shape) en β de spreiding (scale) van de verdeling. We noteren

$$X \sim T_{\gamma,\beta}.$$

Def: Laat $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ en $X \sim \mathcal{X}_n^2$ onafhankelijk zijn $(n \geq 1)$, dan heet de verdeling van

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

een **Student verdeling met n vrijheidsgraden**, genoteerd als

$$T \sim t_n.$$

Def: De **Cauchy verdeling** is de t_n verdeling voor $n = 1$.

Eigenschap. Als $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ en $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ onafhankelijk zijn, dan is $\frac{X}{Y}$ Cauchy verdeeld.

Bewijs. $\frac{X}{Y}$ is verdeeld als $\frac{X}{\sqrt{Y^2}} \sim t_1$

Def: Als $W \sim \mathcal{X}_m^2$ en $V \sim \mathcal{X}_n^2$ onafhankelijk zijn, dan noemt men de verdeling van

$$X = \frac{W/m}{V/n}$$

de **F-verdeling** met m vrijheidsgraden in de teller en n vrijdheidsgraden in de noemer. Notatie:

$$X \sim F_{m,n}.$$

Def: Men zegt dat de s.v. $Y > 0$**lognormaal verdeeld** is (met parameters $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$) indien

$$X = ln(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

2.6 Transformatie van stochastische veranderlijken.

Stelling: Zij X een continue s.v. met dichtheidsfunctie $f_X(x)$, zodanig dat $f_X(x) = 0 voor x \notin S$. Zij $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zodat $U = h(X)$ opnieuw een s.v. is. Indien h een differentieerbare, strikt stijgende of strikt dalende functie op S is, dan is de dichtheidsfunctie van U

$$f_U(u) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(u))\left|\frac{dh^{-1}(u)}{du}\right| & u \in h(S) \\ 0 & u \notin h(S) \end{cases} \tag{26}$$

Bewijs. Veronderstel eerst dat h een *strikt stijgende* functie is. Bijgevolg geldt dat de gebeurtenis $\{h(X) \leq u\}$ gelijk is aan $\{X \leq h^{-1}(u)$. Hierdoor krijgen we voor $u \in h(S)$:

$$F_U(u) = P(Y \leq u) = P(h(X) \leq u) = P(X \leq h^{-1}(u)) = F_X(h^{1-}(u)).$$

Na differentiatie geeft dit

$$f_U(u) = f_X(h^{1-}(u))\frac{dh^{-1}(u)}{du}.$$

Voor h een *strikt dalende* functie is de gebeurtenis $\{h(X) \leq u\}$ gelijk aan $\{X \geq h^{-1}(u)\}$ en dus

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(h(X) \leq u) = P(X \geq h^{-1}(u)) = 1 - F_X(h^{-1}(u)).$$

Defferentiatie lever dan

$$f_U(u) = -f_X(h^{-1}(u))\frac{dh^{-1}(u)}{du} = f_X(h^{-1}(u))\left|\frac{dh^{-1}(u)}{du}\right|$$

aangezien h, en dus ook h^{-1}, strikdt dalend is op S en h^{-1} dus een negatieve afgeleide heeft.

Eigenschap: (integraaltransformatie) Zij X een continue s.v. met een verdelingsfunctie F_X strikt stijgend op $F_X^{-1}(]0,1[)$ en beschouw de transformatie

$$U = F_X(X).$$

Dan geldt altijd dat $U = \mathcal{U}[0,1]$.

Bewijs. Dit resultaat is eenvoudig na te gaan. Voor $u \in]0,1[$ is

$$F_U(u) = P(F_X(X) \leq u) = P(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u,$$

wat precies de verdelingsfunctie van een uniforme verdeling is.

Eigenschap: Zij $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ en beschouw de transformatie

$$X = F^{-1}(U).$$

Dan is F de verdelingsfunctie van X.

Bewijs. De verdelingsfunctie van X is

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

omdat U uniform verdeeld is.

3 Bivariate verdelingen

3.1 Inleiding

- -

3.2 Verdeling van een stochastisch koppel

Zij X_1, X_2 een koppel stochastische veranderlijken met gezamenlijke verdelingsfunctie $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. De verdelingsfunctie van X_i met $i \in \{1,2\}$, noemen we een **marginale verdelingsfunctie** van F_{X_1,X_2}. Deze wordt bekomen door in $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) x_i$ te behouden en de andere waarde gelijk aan $+\infty$ te stellen.

Def: De stochastische verandelijken X_1 en X_2 gedefinieerd op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heten **onafhankelijk** als voor alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (dus voor alle Borelverzamelingen in $\mathbb{R}$ de gebeurtenissen

$$\{X_1 \in B_2\} \text{ en } \{X_2 \in B_2\}$$

(onderling) onafhankelijk zijn.

Def:
Zij (X, Y) een *discrete* stochastische vector op $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ met gezamenlijke kansverdeling $P(X = x, Y = y)$. De **voorwaardelijke verdeling** van X gegeven $Y = y$ wordt genoteerd als en gedefinieerd door

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

als $P(Y = y) > 0$.
Indien (X, Y) een *continue* stochastische vector op $\Omega, \mathcal{A}, P$ is met gezamenlijke dichtheidsfunctie $f_{X,Y}$, dan wordt de **voorwaardelijke dichtheidsfunctie** van X gegeven $Y = y$ genoteerd als en gedefinieerd door

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

als $f_Y(y) > 0$

3.3 Karakteristieken van een stochastisch koppel

Def: Zij $()X_1, X_2)$ een stochastisch koppel en $g = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een Borelmeetbare functie. De **verwachtinswaarde** van de s.v. $g(X_1, X_2)$ is dan gedefinieerd als

$$E[g(X_1, X_2)] = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} g(x_1, x_2) P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) & (\textit{discreet}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & (\textit{continu}) \end{cases} \tag{27}$$

indien

$$\begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} \left| g(x_1, x_2) \right| P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) < \infty & (\textit{discreet}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g(x_1, x_2) \right| f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 < \infty & (\textit{continu}) \end{cases} \tag{28}$$

Def: De **covariantie** van X_1 en X_2 wordt gedefinieerd als

$$Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])]$$

De covariantie si alleen gedefinieerd als de betrokken verwachtingswaarden bestaan.

Def: De **correlatiecoëfficiënt** van X_1 en X_2 wordt gedefinieerd als

$$Corr(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var[X_1]Var[X_2]}}$$

als deze bestaat.

Stelling: Neem X_1 en X_2 onafhankelijke s.v. en stel dat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een Borelmeetbare functie si zodat voor alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ geldt dat $g(x_1, x_2) = g(x_1)g(x_2)$ en dat $E[g_i(X_i)] < \infty$ voor $i \in \{1, 2\}$. Dan geldt

$$E[g(x_1, x_2)] = E[g_1(x_1)]E[g_2(x_2)]$$

Bewijs. We geven hier enkel het bewijs voor continue s.v. Het bewijs in het discrete geval verloopt analoog (oefening).

$$\begin{aligned} E[g(x_1, x_2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x_1) g_2(x_2) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= (\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1)(\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2) \\ &= E[g_1(x_1)]E[g_2(x_2)] \end{aligned} \tag{29}$$

Stelling: Voor X_1, X_2 s.v. geldt

1. $\left|Cov(X_1, X_2)\right| \leqslant \sqrt{Var[X_1]Var[X_2]}$
2. Als X_1 en X_2 onafhankelijk zijn, dan is $E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$ en $Cov(X_1, X_2) = 0$. Het omgekeerde is niet noodzakelijk waar.

Bewijs.

1. Dit volgt uit toepassing van de Cauchy-Schwarz ongelijkheid

$$\begin{aligned}\left|Cov(X_1, X_2)\right| &= \left|E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])]\right| \\ &\leq \sqrt{E[(X_1 - E[X_1])^2]E[(X_2 - E[X_2])^2]} \\ &= \sqrt{Var[X_1]Var[X_2]}.\end{aligned} \tag{30}$$

2. Gebruikmakend van de eerste stelling in deze sectie bekomen we

$$\begin{aligned}Cov(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= E[X_1]E[X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= 0.\end{aligned} \tag{31}$$

Gevolg: Voor X_1, X_2 s.v. geldt

1. $-1 \leq Corr(X_1, X_2) \leq 1$
2. Als $X_2 = aX_1 + b, a, b \in \mathbb{R}$, dan is

$$Corr(X_1, X_2) = \frac{a}{|a|} = sgn(a)$$

Bewijs.

1. Dit is een direct gevolg van de vorige stelling.
2. $X_2 = aX_1 + b$ impliceert dat $E[X_2] = aE[X_1] + b$ en $Var[X_2] = a^2Var[X_1]$. We vinden dat

$$\begin{aligned}Cov(X_1, X_2) &= E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] \\ &= E[(X_1 - E[X_1])(a(X_1 - E[X_1]))] \\ &= aCov(X_1, X_1) \\ &= aVar[X_1].\end{aligned} \tag{32}$$

Bijgevolg

$$Corr(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var[X_1]Var[X_2]}} = \frac{aVar[X_1]}{\sqrt{a^2(Var[X_1])^2}} = \frac{a}{|a|}.$$

Stelling: Zij X_1 en X_2 s.v. en $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dan is

1. $E[a_1X_1 + a_2X_2] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2]$
2. $Var[a_1X_1 + a_2X_2] = a_1^2Var[X_1] + a_2^2Var[X_2] + 2a_1a_2Cov(X_1, X_2)$.

Bewijs.

1. Dit volgt direct uit de lineariteit van de verwachtingswaarde.

2. Gebruikmakend van 1. vinden we:

$$\begin{aligned} Var[a_1X_1 + a_2X_2] &= E[a_1(X_1 - E[X_1]) + a_2(X_2 - E[X_2]))^2] \\ &= E[a_1^2(X_1 - E[X_1])^2 + a_2^2(X_2 - E[X_2])^2 + 2a_1a_2(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[\\ &= E[a_1^2(X_1 - E[X_1])^2] + E[a_2^2(X_2 - E[X_2])^2] + E[2a_1a_2(X_1 - E[X_1])(X_2 \\ &= a_1^2Var[X_1] + a_2^2Var[X_2] + 2a_1a_2Cov(X_1, X_2). \end{aligned} \tag{33}$$

3.4 Bivariate normale verdeling

Def: Een stochastisch koppel (X, Y) heeft een **bivariate normale verdeling** als de gezamenlijke verdelingsfunctie van X en Y gegeven wordt door

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2}\times[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2])}$$

voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, waarbij $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_0^+$ en $\rho \in]-1,1[$ de vijg parameters van de verdeling zijn.

4 Benaderingen van verdelingen

4.1 Limietstellingen

De centrale limietstelling: (of CLS) een rij i.i.d. s.v., met $E[X_1] = \mu$ en $Var[X_1] = \sigma^2 < \infty$. Zij $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ dan geldt

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{D} Z$$

met $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Men zegt dat de gestandaardiseerde som, $\frac{S_n - n\mu}{n\sigma}$, *in verdeling convergeert* naar een standaard normaal verdeelde s.v. Z. Dit betekent dat

$$\forall x \in \mathbb{R} = \lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Stelling van Moivre-Laplace: Zij (X_n) een rij onafhankelijke s.v. die allen Bernoulli verdeeld zijn met parameter $p \in]0,1[$, en zij $S_n = X_1 + ... + X_n$, dan

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{D} Z$$

met $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bewijs. Als $X_i \sim \mathcal{B}(1,p)$, voor alle i, dan weten we dat $E[X_i] = p$ en $Var[X_i] = pq$, dus het resultaat volgt onmiddelijk uit de CLS.

Stelling van Poisson: Zij (X_n) een rij s.v. met $X_n \sim \mathcal{B}(n,p_n)$. Als $n \to \infty$ en $p_n \to 0$, zodanig dat $np_n \to \alpha \text{met} 0 < \alpha < \infty$, dan geldt:

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

met $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$

Bewijs. Het volstaat te bewijzen dat

$$M_{\mathcal{B}_{(n,p_n)}}(t) \xrightarrow{n\to\infty} M_{\mathcal{P}(\alpha)}(t)$$

met $(\forall t \in \mathbb{R})$. Berekening:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}(n,p_n)}(t) &= (q_n + p_n e^t)^n \\ &= (+\frac{(e^t-)np_n}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{np_n\to\alpha} e^{\alpha(e^t-1)} = M_{\mathcal{P}(\alpha)}(t) \end{aligned} \tag{34}$$

gebruikmakend van $(1+\frac{a_n}{n})^n \to e^a$ indien $a_n \to a$.

4.2 Praktische benaderingen

– –

5 Combinatieleer

5.1 Variaties

Def: Een **variatie** van $p \in \mathbb{N}$ elementen uit $n \in \mathbb{N}$ elementen $p \leq n$ is een *geordend* p-tal van p *verschillende* elementen gekozen uit een gegeven verzameling van n elementen.

Stelling: Voor $1 \leq p \leq n$ is het aantal variaties van p elementen uit n gelijk aan

$$V_n^p := n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$$

Bewijs. We nemen een rij van lengte p met de elementen $\{1, 2, ..., n\}$. Voor de eerste plaats is er de vrije keuze, er zijn dus n mogelijkheden. Eens de eerste plaats is ingevuld kan de tweede plaats ingevuld worden met een element uit de overgebleven n-1 elementen. Er zijn dus reeds $n(n-1)$ geordende tweetallen. Voor de derde plaats is er de keuze uit de overgebleven $(n-2)$ elemnten, enz. Als de eerste p-1 plaatsen van de rij zijn ingevuld, kan op de p-de plaats in de rij nog gekozen worden uit n-p+1 elementen. Er zijn dus$n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ mogelijke geordende p-tallen.

Eigenschappen:

$$V_n^0 = 1$$

$$V_n^n = n!$$

Def: Een **herhalingsvariatie** van $p \in \mathbb{N}$ elementen uit $n \in \mathbb{N}$ elementenn is een *geordend* p-tal van p elemnten gekozen uit een gegeven verzameling n elementen.

Stelling: Het aantal herhalingsvariaties van p elementen uit n is gelijk aan

$$\overline{V}_n^p = n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^p$$

5.2 Permutaties

Def: Een **permutatie** van $n \in \mathbb{N}$ elementen is een variatie van n uit n elementen.

Def: Zij $n, p, q, r \in \mathbb{N}$ met $p+q+....+r = n$ dan is een *herhalingspermutatie* van n elementen waarvan p elementen van een eerste soort, q elementen van een tweede soort, ..., r elementen van een laatste soort, een *geordend* n-tel gevormd met deze p elementen van een eerst soort, deze q elementen van een tweede soort, ... en deze r elementen van een laatste soort.

Stelling: Het aantal herhalingspermutaties van n elementen van p elementen van een eerste soort, q elementen van een tweede soort, ..., r elementen van een laatst soort, is

$$\overline{P}_n^{p,q,...,r} = \frac{n!}{p!q!...r!} =: \binom{n}{pq...r}$$

5.3 Combinaties

Def: Een **combinatie** van p elementen uit n elementen ($p \leq n$) is een deelverzameling van p verschillende elementne gekozen uit een gegeven verzameling van n elementen. De volgorde heeft geen belang.

Stelling: Het aantal combinaties van p elementen uit n is

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} =: \binom{n}{p}$$

Bewijs. We hebben reeds het aantal variaties van p ui n elementen V_n^p waarbij p-tallen geordend zijn. Bij een combinatie speelt de volgorde geen rol dus zijn er teveel combinaties. Indien de opgenomen elementen dezelfde zijn, zijn er $P_p = p!$ p-tallen die dezelfde combinatie geven. Dus, $V_n^p = C_n^p \cdot P_p$ of nog $C_n^p = \frac{V_n^p}{P_p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Eigenschappen:

1. $C_n^n = C_n^0 = 1$
2. $C_n^p = C_n^{n-p}$
3. De formule van Pascal $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

Bewijs. zelf na te gaan.

Stelling: $\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p}$

Bewijs. zelf na te gaan.

Binomium van Newton: $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\end{aligned} \tag{35}$$

Bewijs. Door volledige inductie

Multinomiale ontwikkeling $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$$

waar de som loopt over alle $(n_1, n_2, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k$ waarvoor $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

Eigenschap: Het aantal deelverzamelingen van een verzameling A ($\#\mathcal{D}(\mathcal{A})$) met $n \in \mathbb{N}_0$ elementen is 2^n.

Bewijs. Er geldt voor $\#A = n$ dat $\#\mathcal{D}(\mathcal{A})$ = de som van de aantallen deelverzamelingen met $0, 1, 2, ..., n$ elementen. Dus $\#\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}$. Dit is vanwege de binomiumformule met $a = b = 1$ gelijk aan $(1+1)^n = 2^n$