Vraag	1	2	3	Totaal
Punten	5	8	7	20
Score:				

Kansrekenen I (G0N34a)
Tussentijdse toets

Dr. Niels Bonneux

22 maart 2022

Naam (drukletters):

Studentennummer:

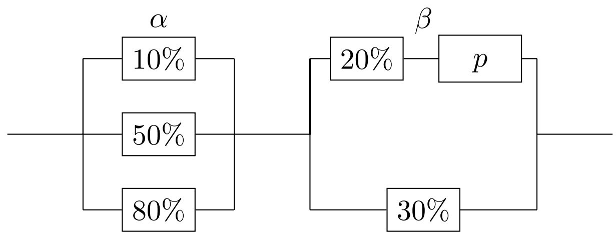
Studierichting (omcirkel): Wiskunde Fysica Informatica

Lees volgende aanwijzingen alvorens aan de toets te beginnen:

- Schrijf **op elk blad** duidelijk je volledige **naam en studentennummer**.
- Je mag gebruik maken van een niet-grafisch rekenmachine, een formularium en statistische tabellen. Op het formularium en de tabellen mag niets geschreven staan. Berekeningen moeten altijd schriftelijk uitgevoerd worden tot het punt dat je de waarde zou kunnen opzoeken in een statistische tabel.
- Beargumenteer steeds je antwoord. Toon dus duidelijk aan hoe je tot ieder numeriek resultaat komt. Benoem de gebruikte formules en ook je berekening. Gebruik zoveel mogelijk de wiskundige notatie zoals die is aangebracht. Verklaar nieuwe symbolen. Let op:
  - een correct (numeriek) antwoord zonder uitleg (of foute uitleg) is weinig tot niets waard;
  - een fout (numeriek) antwoord zonder uitleg is niets waard;
  - een fout numeriek antwoord (ten gevolge van een rekenfout) met juiste afleiding is veel waard.
- Je hebt **1 uur en 20 minuten** tijd om de toets op te lossen.

Veel succes

1. (5 punten) Beschouw onderstaand netwerk dat bestaat uit deel α en deel β met componenten die onafhankelijk van elkaar werken. De waarden in de figuur duiden de faalkans aan van iedere individuele component.



   (a) Bepaal de waarde p zodat de faalkans van het systeem gelijk is aan 9.9904%.

   Oplossing: Noem A de gebeurtenis dat α faalt. Voor de parallel schakeling geldt

   $$P(A) = 0.1 \cdot 0.5 \cdot 0.8 = 0.04.$$

   Noem B_1 de gebeurtenis dat het bovenste deel van β faalt en gebruik B om aan te duiden dat β faalt. Dan is

   $$P(B_1) = 0.2 + p - 0.2p = 0.2 + 0.8p.$$

   Zo vinden we dat

   $$P(B) = (0.2 + 0.8p) \cdot 0.3 = 0.06 + 0.24p.$$

   De faalkans van het netwerk is dus

   $$P(S) = 0.04 + (0.06 + 0.24p) - 0.04 \cdot (0.06 + 0.24p) = 0.0976 + 0.2304p.$$

   Omdat $P(S) = 0.099904$ vinden we zo dat

   $$p = \frac{0.099904 - 0.0976}{0.2304} = 0.01 = 1\%.$$

   (b) Bepaal de kans dat deel α gefaald heeft wanneer het netwerk faalt.

   Oplossing: Gebruikmakend van de stelling van Bayes vinden we

   $$P(A|S) = \frac{P(S|A) \cdot P(A)}{P(S)} = \frac{1 \cdot 0.04}{0.099904} = 0.400384 \approx 40\%.$$

   Merk op dat $P(S|A) = 1$; in een serieschakeling faalt het systeem zodra een deel faalt.

2. (8 punten)

   (a) Gegeven is een universum Ω en twee σ-algebra's A_1 en A_2. Is $A_1 \cap A_2$ ook een σ-algebra over Ω? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

   Oplossing: $A_1 \cap A_2$ is een σ-algebra, we gaan de axioma's na en maken gebruik van het feit dat A_1 en A_2 ook σ-algebras zijn.

   - Omdat $\Omega \in A_1$ en $\Omega \in A_2$ volgt dat $\Omega \in A_1 \cap A_2$.

- Zij $A \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Dan is $A \in \mathcal{A}_1$ en dus ook $A^c \in \mathcal{A}_1$. Analoog is $A \in \mathcal{A}_2$ en dus ook $A^c \in \mathcal{A}_2$. We concluderen dat $A^c \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.
- Zij $A_n \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan is $A_n \in \mathcal{A}_1$ voor alle n en dus ook $\cup_n A_n \in \mathcal{A}_1$. Analoog is $A_n \in \mathcal{A}_2$ voor alle n en dus ook $\cup_n A_n \in \mathcal{A}_2$. We concluderen dat $\cup_n A_n \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

(b) Zij $X \sim \mathcal{N}(12, \sigma^2)$ waarbij $\sigma > 0$. Geef een uitdrukking voor de IQR (interkwartielafstand) van X. Beargumenteer je antwoord.

Oplossing: De definitie zegt

$$IQR = F_X^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - F_X^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Voor een standaardnormale verdeling Z geldt $\Phi^{-1}(0.75) \approx 0.67$ (gebruik tabel) en wegens symmetrie is $\Phi^{-1}(0.25) \approx -0.67$. Omdat $X = \sigma Z + 12$ is

$$\begin{aligned} F_X^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) &\approx 0.67 \cdot \sigma + 12, \\ F_X^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) &\approx -0.67 \cdot \sigma + 12. \end{aligned}$$

We concluderen zo dat de interkwartielafstand wordt gegeven door 1.34σ.

(c) Zij X een continue stochastische veranderlijke op $\mathbb{R}$ met een even dichtheidsfunctie f_X, dat wil zeggen $f_X(x) = f_X(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, én zodat de verdelingsfunctie strikt stijgend is. Bepaal $\mathrm{Med}(X)$ en verklaar je antwoord.

Oplossing:

$$\begin{aligned} F_X(0) &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(-x)\, dx = \int_{\infty}^{0} -f_X(u)\, du \\ &= \int_{0}^{\infty} f_X(u)\, du = P(X \geq 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F_X(0) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $F_X(0) = \frac{1}{2}$. Omdat F_X strikt stijgend is, volgt dat $\mathrm{Med}(X) = F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

3. (7 punten) Een dominoset bestaat uit stenen waarop 7 verschillende kleuren kunnen voorkomen. Op elke steen zijn er 2 kleurvakken die door 2 verschillende of door 2 keer dezelfde kleur ingevuld kunnen worden. In de dominoset is elke steen uniek.

(a) Beargumenteer dat de dominoset uit 28 dominostenen bestaat.

Oplossing: Er zijn 7 stenen waarbij de 2 kleurvakken door dezelfde kleur zijn ingevuld. Voor de stenen met 2 verschillende kleuren zijn er $\binom{7}{2} = 21$ mogelijkheden. De dominoset bestaat dus uit 28 dominostenen.

(b) Eén van de kleuren is blauw. Wat is de kans dat wanneer je een willekeurige dominosteen trekt uit de set, deze dominosteen minstens één blauw kleurvak heeft?

Oplossing: Van de 7 stenen met 2 dezelfde kleurvakken is er juist 1 steen waarbij minstens 1 kleurvak blauw is (namelijk de steen met kleuren blauw en blauw). Voor de stenen met verschillende kleuren zijn er 6 stenen waarbij één van de kleurvakken blauw is, namelijk de stenen die 1 kleurvak blauw hebben en waarbij het andere kleurvlak een andere kleur heeft (er zijn 6 andere kleuren). Zij B de gebeurtenis op het trekken van een dominosteen met minstens 1 blauw kleurvlak, dan is

$$P(B) = \frac{1+6}{28} = 25\%$$

omdat elke steen evenveel kans heeft om getrokken te worden.

(c) Aan elke kleur wordt een uniek natuurlijk getal van 1 tot en met 7 toegekend. Geef aan elke dominosteen de waarde die de som van de getallen is, toegekend aan de kleuren op de kleurvakken. Zij X de stochastische veranderlijke die de waarde van de dominosteen aangeeft. Bepaal de verwachtingswaarde van X.

Oplossing: Elk cijfer komt 8 keer voor. Dat kan je zien uit volgende tabel.

X	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2		4	5	6	7	8	9
3			6	7	8	9	10
4				8	9	10	11
5					10	11	12
6						12	13
7							14

We vinden zo

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{28} \cdot 8(1+2+3+4+5+6+7) = 8.$$

(d) Beschouw nu een dominoset die bestaat uit 46 verschillende kleuren en aan elke kleur wordt opnieuw een uniek natuurlijk getal gekoppeld van 1 tot en met 46. Dergelijke set bestaat uit 1081 dominostenen. Beschouw opnieuw de stochastische veranderlijke X. Dan geldt dat $\mathrm{E}(X) = 47$ en $\mathrm{Var}(X) = 360$. Bepaal een nauwkeurige (niet-triviale) ondergrens voor de kans dat een willekeurig getrokken dominosteen hoogstens waarde 76 heeft.

Oplossing: We maken gebruik van de ongelijkheid van Chebyshev.

$$\begin{aligned} P(X \leq 76) &= 1 - P(X \geq 77) \\ &= 1 - P(|X| \geq 77) \\ &\geq 1 - \frac{1}{77^2} E(X^2) \\ &= 1 - \frac{1}{5929}(360 + 47^2) \\ &\approx 56.67\% \end{aligned}$$

Alternatief: het 2e gevolg van Chebyshev's ongelijkheid is $P(|X - 47| \geq a) \leq 360/a^2$ voor alle

$a > 0$. Kies $a = 30$, dan vinden we

$$P(X \leq 17) + P(X \geq 77) \leq 0.4$$

Wegens symmetrie is $P(X \leq 17) = P(X \geq 77)$ zodat $P(X \geq 77) \leq 0.2$. We concluderen zo dat

$$P(X \leq 76) = 1 - P(X \geq 77) \geq 0.8$$

Een exacte bereking met de computer geeft $P(X \leq 76) = \frac{1009}{1081} \approx 93.34\%$.