

# Examen Kansrekenen en Statistiek 2

7 juni 2020

Dit examen was speciaal omdat het tijdens de Coronaperiode plaatsvond. We kregen slechts drie uur voor het examen.

## 1 Theorie

### 1.1 Vraag 1

Zij  $X$  een s.v. met dichtheidsfunctie  $f_X$  en  $\varphi_X$  de karakteristieke functie van  $X$ . Gegeven is dat:

$$\varphi_X(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} f_X(x) dx$$

Gegeven is nog dat het  $n$ -de moment  $M_n$  van  $X$  bestaat voor elke  $n \in \mathbb{N}$  en dat geldt dat:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n!} = \frac{1}{p}$$

Voor een  $0 < p < \infty$ . Toon aan dat:

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!} (it)^n$$

### 1.2 Vraag 2

We bekijken het Poissonproces. Zij  $T_1, T_2, \dots, T_n$  s.v. die exponentieel verdeeld zijn met parameter  $\lambda$  (tabel met verdelingen was beschikbaar). Zij  $S_n$  de som van  $T_1, \dots, T_n$ .

- Wat is de verdeling van  $S_n$ ? Toon aan.
- Wat is de verdeling van de s.v. die weergeeft hoeveel mensen eraan komen tussen  $[0, t]$  voor een vaste  $t \in \mathbb{R}$ ? Toon aan.

### 1.3 Vraag 3

- Geef de definitie van de Fisher informatie voor een willekeurige dimensie  $d$  van de parameter  $\theta$  van een s.v.  $X$ .
- Toon aan dat voor de Fisher informatie  $I(\theta)$  geldt dat:

$$I(\theta) = E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(X, \theta) \right]$$

## 2 Oefeningen

### 2.1 Oefening 1

Gegeven is de verdeling  $X$  met dichtheidsfunctie:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} & x > \theta_1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

- Wat is de MLE van  $(\theta_1, \theta_2)$ ?
- Als  $\theta_1$  gekend is, wat is dan de MLE van  $\theta_2$ ? Wat is de asymptotische verdeling van de MLE? Toon aan.
- Als  $\theta_2$  bekend is, wat is dan de verdeling van de MLE van  $\theta_1$ ? Bereken de verwachtingswaarde van de schatter.
- Nog steeds in de veronderstelling dat  $\theta_2$  bekend is. Bereken de UMVUE van  $\theta_1$ . Hierbij mag je ervan uitgaan dat de MLE van  $\theta_1$  een volledige statistiek is.

### 2.2 Oefening 2

Zij  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d verdeeld volgens  $X$  met de verdeling  $\text{Binom}(1, p)$  met  $p \neq 0.5$ . We weten allemaal dat  $\bar{X}$  (gemiddelde van  $X$ ) de UMVUE is voor  $p$ . In dit geval bekijken we echter een schatter voor  $p(1-p)$ .

- Onderstaande R-code gebruikt een schatter voor  $p(1-p)$ . Welke schatter? Gebruik de delta methode om de asymptotische verdeling van de schatter te berekenen.
- Welke eigenschappen worden in de R-code geïllustreerd?

```
schatter = function(n, p){
  X = rbinom(n, 1, p)
  mean_uitkomst = cumsum(X) / 1:n
  uitkomst = mean_uitkomst * (1 - mean_uitkomst)
  return(uitkomst)
}

m      = 500
nmax   = 2000
p      = 0.4

data = matrix(replicate(m, schatter(nmax, p)),
              nrow = m, ncol = nmax, byrow = TRUE)

plot(ecdf(sqrt(10) * (data[, 10] - p * (1-p))), ylim = c(0, 1), xlab = "", ylab = "", cex = 0.1)
lines(ecdf(sqrt(50) * (data[, 50] - p * (1-p))), col = "red", cex = 0.1)
lines(ecdf(sqrt(500) * (data[, 500] - p * (1-p))), col = "green", cex = 0.1)
lines(ecdf(sqrt(2000) * (data[, 2000] - p * (1-p))), col = "blue", cex = 0.1)
sequence = seq(-6, 6, length = 1000)
lines(sequence, pnorm(sequence, mean=0, sd=sqrt(p * (1-p) * (1 - 2 * p)**2)), lwd = 2)

epsilon = 0.05
```

```
crit = colSums(abs(data - p * (1-p)) > epsilon) / m  
plot(1:nmax, crit, type = "l")
```