KANSREKENEN 1 - OEFENINGEN 2023-2024

LIAM LUYS - 2e BA INFORMATICA

1)

A.1) $p = 8, \ n = 2$ → 8 keer kiezen uit 2 opties, volgorde belangrijk + herhaling

$$\overline{V}_2^8 = 2^8 = 256$$

A.2)

1. $$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

2. $$V_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Oefeningen toewijzen → volgorde belangrijk!

A.3) $$C_{12}^6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = 924$$ → Aantal mogelijke teams van 6 uit 12

Omdat het 2e team automatisch wordt bepaald door de keuze van het 1e team kunnen we de opties halveren:

$$\frac{C_{12}^6}{2} = \frac{924}{2} = 462$$

A.4)

1. 6 Mogelijkheden

2. $C_6^1 \cdot C_5^1 = 30 \cdot C_5^1 = 150$

↳ Volgorde onbelangrijk, maakt niet uit hoe je de dobbelstenen rolt.

3. $C_6^1 \cdot C_5^1 = 30 \cdot C_5^2 = 300$

4. $C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 120 \cdot C_5^3 = 1200$

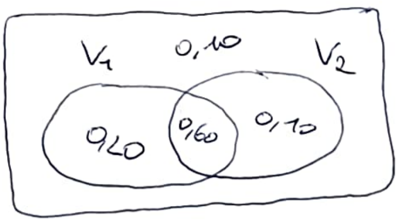
5. $C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 120 \cdot \frac{C_5^2}{2} \cdot C_3^2 = 1800$

6. $C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 360 \cdot C_5^2 = 3600$

7. $V_6^5 = 720$

Totaal Aantal Mogelijkheden : $\overline{V}_6^5 = 6^5 = 7776$

1.1) $P(V_1) = 0{,}80$ $P(V_2) = 0{,}70$ $P(V_1 \cap V_2) = 0{,}60$



a) $P(\neg V_2)$

$= 1 - P(V_2)$

$= 1 - 0{,}70$

$= 0{,}30$

b) $P(V_1 \cup V_2)$

$= P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2)$

$= 0{,}80 + 0{,}70 - 0{,}60$

$= 0{,}90$

c) $P(\neg V_1 \cap \neg V_2)$

$= 1 - P(V_1 \cup V_2)$

$= 1 - 0{,}90$

$= 0{,}10$

1.2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $C = \{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\}\}$

$\sigma(C)$ -> Alle elementen van C
↳ Alle complementen, unies en doorsneden
↳ $\emptyset$ en Ω

$$\sigma(C) = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3,4\}, \{3,4,5,6\}, \underset{\{1,2,3,4\}^C}{\{5,6\}}, \underset{\{3,4,5,6\}^C}{\{1,2\}}, \underset{\{1,2\}\cup\{5,6\}}{\{1,2,5,6\}}, \{3,4\}\}$$

↳ $\{1,2,5,6\}^C$

1.3) $\Omega = \{0,1,2\}$

Stel $\sigma_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{0,2\}\}$, $\sigma_2 = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{0,1\}\}$

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}\}$$

-> $\{1,2\} \notin \sigma_1 \cup \sigma_2$ => geen σ-Algebra

Bewijs via tegenvoorbeeld.

1.4)

Kansmaat -> $P(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$
↳ $P(\Omega) = 1$
↳ $P(\bigcup_x x) = \sum_x P(x) \quad \forall x \subseteq \Omega$

① $P(x) \geq 0$
↳ Klopt, functie is voor elke n $(0 \leq n \leq 6)$ positief of gelijk aan 0.

OK!

② $P(\Omega) = 1$

$$P(\{1,2,3,4,5,6\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\})$$

$$= \frac{R}{6} + \frac{(6-R)}{6} + 0 + \dots + 0$$

$$= \frac{R+6-R}{6}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

OK!

③

$$P\left(\bigcup_{x \subseteq \Omega} x\right) = \sum_{x \subseteq \Omega} P(x)$$

Stel $A = \bigcup_{x \subseteq \Omega} x$: $P(A) = \sum_{i \in A} P(\{i\})$ (gegeven)

$$= \sum_{x \subseteq \Omega} P(x) \quad (A = \bigcup_{x \subseteq \Omega} x)$$ OK!

De voorwaarden zijn voldaan $\Rightarrow$ P is kansmaat!

2)

1.5) $m \to$ Aantal antwoorden

$p \to$ Kans dat juiste antwoord weet

W: juiste Antwoord weten $\quad$ J: juist Antwoorden

met $P(W) = p$

T.B.: $P(W \mid J) = \dfrac{mp}{mp + 1 - p}$

$$P(W \mid J) = \frac{P(W \cap J)}{P(J)}$$

wet Totale Kans

$$= \frac{P(W \cap J)}{P(W)P(J \mid W) + P(\neg W)P(J \mid \neg W)}$$

Voorwaardelijke Kans

$$= \frac{P(J \mid W) \cdot P(W)}{P(W)P(J \mid W) + (1 - P(W))P(J \mid \neg W)}$$

$P(W) = p$

$P(J \mid W) = 1$

$P(J \mid \neg W) = \frac{1}{m}$ → gokken

$$= \frac{1 \cdot p}{p \cdot 1 + (1-p) \cdot \frac{1}{m}}$$

$$= \frac{p}{p + \frac{1}{m} - \frac{p}{m}} = \frac{mp}{mp + 1 - p}$$

1.6)

a) $P(\text{SYSTEEM TAALT}) = P(\text{A OF B FAALT}) \cdot P(\text{C FAALT})$

$$= \left(P\left(\substack{\text{A FAALT}\\ \text{B NIET}}\right) + P\left(\substack{\text{B FAALT}\\ \text{A NIET}}\right) + P(\text{A en B TALEN})\right) \cdot P(\text{C FAALT})$$

$$= \left(0{,}1 \cdot (1 - 0{,}2^2) + 0{,}2^2 \cdot (1 - 0{,}1) + 0{,}1 \cdot 0{,}2^2\right) \cdot 0{,}1^2$$

Parallel faalt als beide wegen falen

$$= \frac{17}{12500} = 0{,}00136$$

b) $P(\text{A FAALT} \mid \text{SYSTEEM FAALT}) = \dfrac{P(\text{A FAALT EN SYSTEEM FAALT})}{P(\text{SYSTEEM FAALT})}$

$= \dfrac{P(\text{A FAALT, B NIET, OF A EN B FALEN})\, P(\text{C FAALT})}{P(\text{SYSTEEM FAALT})}$

$= \dfrac{(0{,}1 \cdot (1-0{,}2\cdot 0{,}2) + (0{,}1 \cdot 0{,}2^2)) \cdot 0{,}1^2}{0{,}00136}$

$= 0{,}73529$

1.7) we weten dat β en γ onafhankelijk zijn

$P(\text{SYSTEEM FAALT}) = P(\alpha \text{ FAALT}) + P(\beta \text{ FAALT}) \cdot P(\gamma \text{ FAALT})$

$P(\alpha \text{ FAALT}) = P(\beta_{\text{FAALT}}) \cdot P(\alpha_{\text{FAALT}} \mid \beta_{\text{FAALT}})$
$+ P(\beta_{\text{FAALT NIET}}) \cdot P(\alpha_{\text{FAALT}} \mid \beta_{\text{FAALT NIET}})$

$= P(\beta) \cdot P(\alpha \mid \beta) + (1 - P(\beta)) \cdot P(\alpha \mid \neg\beta)$

$= 0{,}10 \cdot 1 + (1 - 0{,}10) \cdot 0{,}50$

$= 0{,}55$

$P(\alpha, \beta, \gamma) = P(\beta, \gamma) \cdot P(\alpha \mid \beta) = P(\beta, \gamma) \cdot 1 = P(\beta) P(\gamma) = 0{,}02$

$\Leftrightarrow P(\text{SYSTEEM}) = P(\alpha) + P(\beta) \cdot P(\gamma) - P(\alpha, \beta, \gamma)$

$= 0{,}55 + 0{,}10 \cdot 0{,}20 - 0{,}02$

$= 0{,}55$

2.1) $$F_L(t) = \begin{cases} 1-\frac{10^6}{t^2} & t > 1000 \\ 0 & t \leq 1000 \end{cases}$$

a) Verdelingsfunctie

↳ F_L monotoon stijgend : $\forall a \leq b : F_L(a) \leq F_L(b)$ (1)

↳ $\lim\limits_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$, $\lim\limits_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$ (2)

↳ F_L rechtscontinu : $\forall a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} F_L(a+h) = F_L(a)$ (3)

(1) F_L Monotoon stijgend -> klopt!

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow F_L(t_1) \leq F_L(t_2)$$

(2)

$$\lim_{a \to \infty} F_L(a) = \lim_{a \to \infty} \left(1 - \frac{10^6}{a^2}\right) = 1 - 0 = 1$$

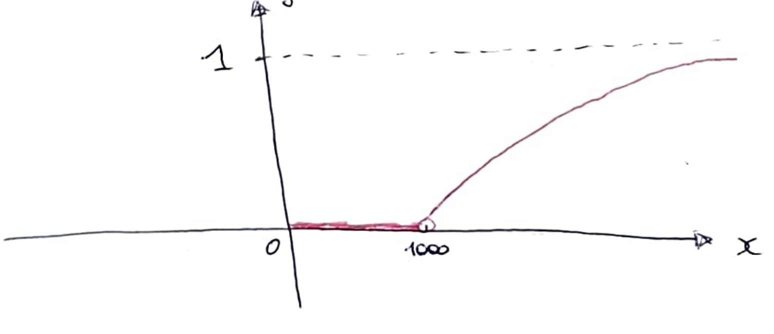
$$\lim_{a \to -\infty} F_L(a) = \lim_{a \to -\infty} (0) = 0$$

(3) F_L Rechtscontinu

$$\lim_{h \overset{>}{\to} 0} F_L(a+h) = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} 1 - \frac{10^6}{(a+h)^2} = 1 - \frac{10^6}{a^2} = F_L(a)$$

Aan de voorwaarden is voldaan!

Schets:



b) $P(600 \leq t \leq 1200)$

$= P(t \leq 1200) - P(t \leq 600)$

$= F_L(1200) - F_L(600)$

$= \frac{11}{36} - 0$

$= 0{,}306$ $\rightarrow 30{,}6\,\%$

c) $P(t \geq 6000)$

$= 1 - P(t \leq 6000)$

$= 1 - P(t \leq 5999)$

$= 1 - F_L(5999)$

$= 1 - 0{,}972$

$= 0{,}0278$

d) $P(t \geq x) = 0{,}05$

$\Leftrightarrow P(t \leq x) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{10^6}{x^2} = 0{,}95$

$\Leftrightarrow x = \left(\sqrt{-\frac{0{,}95 - 1}{10^6}}\right)^{-1}$

$= 4472{,}14$ $\rightarrow$ 4472,14 uren

2.2)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{5}x & 0 \leq x < 5 \\ c\left(2 - \frac{1}{5}x\right) & 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & x < 0 \text{ of } x > 10 \end{cases}$$

a) Dichtheidsfunctie : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{5} \frac{c}{5}x\,dx + \int_{5}^{10} c\left(2-\frac{1}{5}x\right)dx + \int_{10}^{+\infty} 0\,dx$$

$$= \frac{c}{5}\int_{0}^{5} x\,dx + \int_{5}^{10} 2c\,dx + \int_{5}^{10} -\frac{1}{5}cx\,dx$$

$$= \frac{c}{5}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^5 + 2c \cdot [x]_5^{10} + \left(-\frac{1}{5}c\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_5^{10}$$

$$= \frac{c}{5}\left(\frac{25}{2} - 0\right) + 2c \cdot 5 + \left(-\frac{1}{5}c\right)\left(50 - \frac{25}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{10}c + 10c - \frac{15}{2}c$$

$$= 5c = 1 \iff c = \frac{1}{5}$$

Voorwaarde voldaan voor $c = \frac{1}{5}$

b) $P(x \leq 3)$

$$= \int_{-\infty}^{3} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{25} x \, dx$$

$$= \frac{1}{25}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{9}{2}$$

$$= \frac{9}{50}$$

c) $P(X \leq 8)$

$$= \int_{-\infty}^{8} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^5 \frac{1}{25} x \, dx + \int_5^8 \frac{1}{5}\left(2 - \frac{1}{5}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{25}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^5 + \frac{2}{5}\left[x\right]_5^8 - \frac{1}{50}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_5^8$$

$$= 1/2 + 6/5 - 39/50$$

$$= \frac{23}{25}$$

d) $P(3 \leq X \leq 8)$

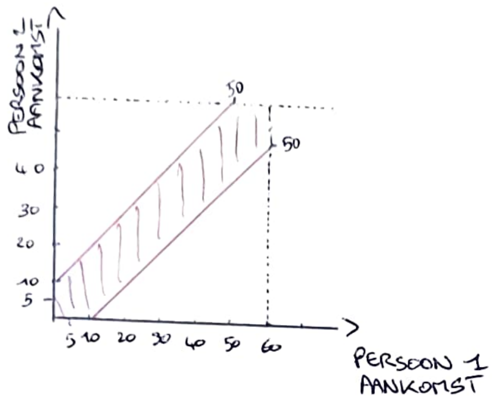
$$= P(X \leq 8) - P(X \leq 3)$$

$$= \frac{23}{25} - \frac{9}{50}$$

$$= 37/50$$

1.8)

Aankomsttijden voorstellen in grafiek: (tijdstip in minuten)



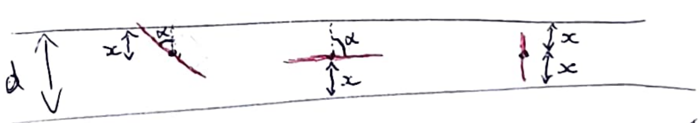
ξ → Momenten dat ze elkaar tegen komen

$$P(\text{samen}) = \frac{\text{Oppervlakte } \xi}{\text{Totale oppervlak}}$$

$$= \frac{60^2 - 50 \cdot 50}{60^2}$$

$$= \frac{1100}{3600} = 30{,}6\ \%$$

1.9)



1. $\Omega : \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi/2 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} d \end{cases}$

$? = \frac{1}{2} L \cdot \cos\alpha$

2. $A : \{ (x,\alpha) \in \Omega \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} L \cdot \cos\alpha ,\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \}$

3. $P(A) = \dfrac{\text{Oppervlakte } A}{\text{Totale Oppervlak}}$

$$\text{Opp}(A) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} L \cos\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} L \left[\sin\alpha \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = L$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{L}{\frac{1}{2} d \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2L}{\pi d}$$

1.10) 5 Rood, 10 zwart

1. Eerste n ballen zwart

↳ 5 Rode en $(10+n)$ ballen in vaas

$$P(\text{zwart}) = \alpha_n = \frac{10+n}{5+10+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10+n}{15+n} = 1$$

2. Tweede tot en met $(n+1)$-ste zwart

$$\beta_n = P(Z_1 \mid Z_2 \cap \cdots \cap Z_{n+1})$$

$$= \frac{P(Z_1 \cap \cdots\cdots \cap Z_{n+1})}{P(Z_1 \cap \cdots \cap Z_{n+1}) + P(Z_1^C \cap Z_2 \cap \cdots \cap Z_{n+1})}$$

$$= \frac{\frac{10}{15} \cdot \frac{11}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{10+n}{15+n}}{\frac{10}{15} \cdot \frac{11}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{10+n}{15+n} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \ldots \cdot \frac{10+n}{15+n}}$$

$$= \frac{10+n}{15+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$$

2.3) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $C = \{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\}\}$

a) $\sigma(C) = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3,4\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2\}, \{5,6\} \{3,4\}, \{1,2,5,6\}\}$

(zie 1.2))

b) $X : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega = 1,2,3,4 \\ 7 & \omega = 5,6 \end{cases}$$

$\sigma(C)$ - Meetbare Afbeelding ?

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \sigma(C)$

$2,7 \notin B : X^{-1}(B) = \emptyset$
$2 \in B, 7 \notin B : X^{-1}(B) = \{1,2,3,4\}$
$2 \notin B, 7 \in B : X^{-1}(B) = \{5,6\}$
$2,7 \in B : X^{-1}(B) = \{1,2,3,4,5,6\}$

Allen zijn elementen van $\sigma(C)$ → OK!

Ja, $X(\omega)$ is een $\sigma(C)$ - meetbare afbeelding

c) $Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 1,2,3 \\ 2 & \omega = 4,5,6 \end{cases}$$

Als $1 \in B, 2 \notin B$: $Y^{-1}(B) = \{1,2,3\}$ → geen element van $\sigma(C)$

2.4)

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$$

met X een s.v., f een Borelmeetbare functie

$f \circ X = f(X)$ ook een s.v.?

Neem $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ willekeurig

f is borelmeetbaar, dus $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

X is s.v., dus geldt: $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$

B is willekeurig en $X^{-1}(f^{-1}(B)) = (f \circ X)^{-1}(B)$

$\Rightarrow f \circ X$ is s.v.

3

2.5) 350 studenten → 10 groepen van 30
↳ 1 groep van 50

a) X → grootte groep van Jan

$$E[X] = \frac{10 \cdot 30}{350} \cdot 30 + \frac{50 \cdot 1}{350} \cdot 50$$

$$= \frac{180}{7} + \frac{50}{7}$$

$$= \frac{230}{7} = 32{,}86$$

b) Y → grootte groep van assistent

$$E[Y] = \frac{10}{11} \cdot 30 + \frac{1}{11} \cdot 50$$

$$= \frac{300}{11} + \frac{50}{11}$$

$$= 31{,}81$$

$$E[Y] < E[X]$$

2.6) X → Score op Proefexamen Kansrekenen

$$E[X] = \frac{60}{100}$$

a) $P\left(X > \frac{80}{100}\right) \leq \frac{1}{\frac{80}{100}} \cdot \frac{60}{100}$ → ongelijkheid Chebyshev

$$= 3/4$$

b) $Var[X] = \frac{36}{100^2}$

$$P(50 \leq X \leq 70) \Rightarrow P\left(\left|X - \frac{60}{100}\right| \geq \frac{10}{100}\right) \leq \frac{\sigma^2}{\left(\frac{10}{100}\right)^2} = \frac{36}{100}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|X-\frac{60}{100}\right| \leq \frac{10}{100}\right) = 1 - P\left(\left|X-\frac{60}{100}\right| \geq \frac{10}{100}\right)$$
$$= 1 - \frac{36}{100}$$
$$= 0{,}64$$

c) $$P\left(X \geq \frac{80}{100}\right) \leq \frac{E[X^2]}{\left(\frac{80}{100}\right)^2}$$ $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$
$$= \frac{Var[X] + E[X]^2}{\left(\frac{80}{100}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{36}{100^2} + \left(\frac{60}{100}\right)^2}{\left(\frac{80}{100}\right)^2}$$
$$= 0{,}5681$$

2.7) B → Besmet Bloed
T → Test geeft besmetting aan

$P(T \mid B) = 0{,}98$ $\qquad n = 20 \qquad T \sim B(20; 0{,}98)$

1. $P(T = 20) = (0{,}98)^{20} \cdot C_{20}^{20}$
$= 0{,}6676 \rightarrow 66{,}7\%$

2. $P(T < 18) = 1 - P(T \geq 18)$
$= 1 - \left(P(T=18) + P(T=19) + P(T=20)\right)$
$= 1 - \left(0{,}98^{18} \cdot 0{,}2^2 \cdot C_{20}^{2} + 0{,}98^{19} \cdot 0{,}2 \cdot C_{20}^{1} \cdot 0{,}98^{20}\right)$
$= 1 - 0{,}9929$
$= 0{,}0071$

2.8) X → Aantal jobs dat hij krijgt $\qquad X \sim B(6, 0{,}40)$

Y → winst die hij maakt

a) $E[X] = n \cdot p$

$= 6 \cdot 0{,}40$

$= 2{,}4$

b) $E[Y] = E[X] \cdot 200 - 300$

$= 480 - 300$

$= 180$

c) winst : $X \cdot 200 - 300 > 0$

$\Leftrightarrow X > \frac{300}{200} = 1{,}5$

$P(X > 1{,}5) = 1 - P(X \leq 1{,}5)$

$= 1 - P(X \leq 1)$

$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - C_6^0 \, 0{,}6^6 - C_6^1 \, 0{,}4 \cdot 0{,}6^5$

$= 1 - 0{,}2333$

$= 0{,}767$

d) $P(\text{verlies}) = 1 - P(\text{winst})$

$= 1 - 0{,}767$

$= 0{,}233$

2.9) $f_X(x) = f_X(-x)$ en $F_X(x)$ stijgend

$\text{Med}(X) = 0$

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

→ Als $F_X(x)$ strikt stijgend is, is de afgeleide steeds positief

→ Functie is even → Middelste element is altijd 0.

2.10)

$$f_X(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

a) $$E[|X-b|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |X-b| \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 |X-b| \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^b -(X-b) \cdot f_X(x)\,dx + \int_b^2 (x-b)\, f_X(x)\,dx$$

$$= -\int_0^b (x-b) \cdot \frac{x}{2}\,dx + \int_b^2 (x-b)\,\frac{x}{2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^b x^2 - bx\,dx + \frac{1}{2}\int_b^2 x^2 - bx\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^b - b\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^b\right] + \frac{1}{2}\left[\left[\frac{1}{3}x^3\right]_b^2 - b\left[\frac{1}{2}x^2\right]_b^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{b^3}{3} - b\cdot 2 + b\cdot\frac{b^2}{2}\right)$$

$$= \frac{b^3}{12} + \frac{4}{3} - \frac{b^3}{6} + \frac{b^3}{4} - b = \frac{b^3}{6} - b + \frac{4}{3}$$

$E[|X-b|]$ minimaal $\rightarrow$ Afgeleide $=0$

$$E[|X-b|]' = \frac{1}{6}\cdot 3b^2 - 1$$

$$= \frac{b^2}{2} - 1 \quad = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \sqrt{2}$$

$$f_X(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$$

$$F_X(\sqrt{2}) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ minimaal als b mediaan is van gegevens

b) $$E[(X-b)^2] = \int_0^2 (x-b)^2\cdot\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2-2xb+b^2)\cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 - 2x^2 b + b^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 - 2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + b^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - 2b\cdot\frac{8}{3} + b^2\cdot 2\right) = b^2 - b\cdot\frac{8}{3} + 2$$

$E[(X-b)^2]$ minimaal $\rightarrow$ Afgeleide $= 0$

$$E[(X-b)^2]' = 2b - \frac{8}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{4}{3}$$

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow E[(X-b)^2]$ minimaal als $b = E[X]$

2.11) $Y \rightarrow$ Aantal studenten tussen ons : $\{0, 1, \dots, n-2\}$

T.B.: $E[Y] = \frac{n-2}{3}$

$$P(Y = d) = \frac{n-1-d}{n+(n-1)+\dots+1}$$

$$= \frac{n-1-d}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{2(n-1-d)}{n^2+n}$$

$$E[Y] = \sum_{d=0}^{n-2} P(X=d)d = \sum_{d=0}^{n-2} \frac{2(n-1-d)}{n^2+n} \cdot d$$

$$= \frac{2}{n^2+n} \sum_{d=0}^{n-2} dn - d - d^2 = \frac{2}{n^2+n} \sum_{d=0}^{n-2} (n-1)d - d^2$$

$$= \frac{2}{n^2+n}\left(\sum^{n-2} (n-1)d - \sum^{n-2} d^2\right) = \dots = \frac{n-2}{3}$$

2.12) $n = 900$ $T \rightarrow$ Som alle ogen

T.B.: $P(2900 < T < 3400) \geq 0{,}958$

EERLIJKE DOBBELSTEEN

$$E[T] = \left(\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \dots + \frac{1}{6}\cdot 6\right)\cdot 900$$
$$= 3{,}5 \cdot 900 = 3150$$

$$E[T_i^2] = \left(\frac{1}{6}\cdot 1^2 + \frac{1}{6}\cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{6}\cdot 6^2\right)$$
$$= \frac{91}{6}$$

$$Var[T_i] = \frac{91}{6} - 3{,}5 = 2{,}917$$

$$Var[T] = 900 \cdot Var[T_i]$$
$$= 900 \cdot 2{,}917$$
$$= 2625$$

$$P(2900 < T < 3400)$$
$$= P(|T - E[T]| < 250)$$
$$= P(|T - 3150| < 250)$$
$$\geq 1 - P(|T - 3150| \geq 250)$$
$$= 1 - \frac{\sigma^2}{250^2}$$
$$= 1 - \frac{2625}{250^2}$$
$$= 0{,}958$$

2.13)

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F_X(n-1))$$

Eerlijke Dobbelsteen $\rightarrow$ $F_X(n) = \begin{cases} 0 & (n < 1) \\ \frac{n}{6} & (1 \leq n \leq 6) \\ 1 & (n > 6) \end{cases}$

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F_X(n-1))$$

$$= \sum_{n=1}^{6} \left(1 - \frac{(n-1)}{6}\right) + \sum_{n=7}^{\infty} (1 - 1)$$

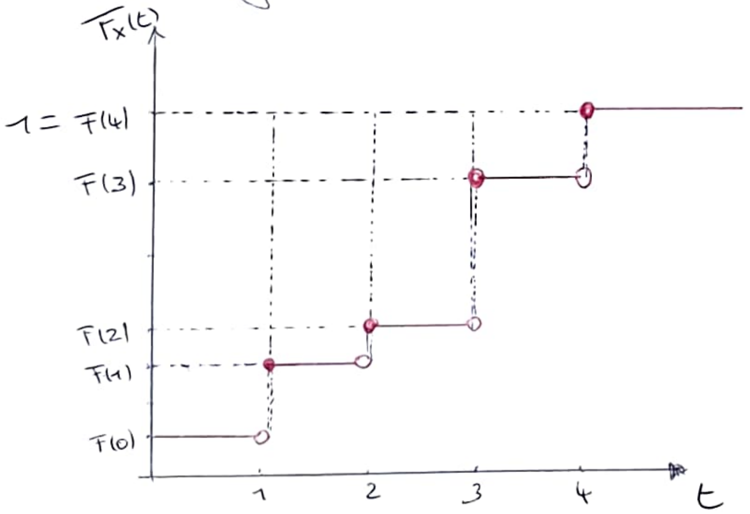
$$= \sum_{n=1}^{6} \left(1 - \frac{(n-1)}{6}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{6} \frac{7-n}{6} = \frac{7-1}{6} + \frac{7-2}{6} + \frac{7-3}{6} + \frac{7-4}{6} + \frac{7-5}{6} + \frac{7-6}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + \cdots + 6)$$

$$= 3{,}5$$

Tekening



$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

$\{ \rightarrow$ $E[X]$ zijn de horizontale balkjes

$\} \rightarrow$ $P(X \geq n)$ zijn de verticale balkjes

2.14) $X_i \to$ Afrondingsfout : $\{-0{,}49, \dots, 0{,}49\}$

$$P\left(X_i = \frac{k}{100}\right) = \begin{cases} \frac{1}{100} & k = \{-49, \dots, 49\} \setminus \{0\} \\ \frac{2}{100} & k = 0 \end{cases}$$

$n = 258$ Bovengrens voor $P(X \geq 12{,}5)$

$E[X_i] = 0$ → Symmetrisch met gelijke kansen

$$\begin{aligned} Var[X_i] &= E[X^2] \\ &= \sum_{x=-49}^{49} P(X = x^2)\, x^2 \\ &= \frac{1}{100}\left(\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots + \left(\frac{49}{100}\right)^2\right) \cdot 2 \\ &= \frac{1}{1000\,000}\left(1^2 + \dots + 49^2\right) \cdot 2 \\ &= \frac{1}{1000\,000} \, \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} \cdot 2 \\ &= 0{,}08085 \end{aligned}$$

→ ook voor negatieve −49 t.e.m. −1.

somformules (zie formularium)

$X \to$ Afrondingsfout op 258 bedragen

$$\begin{aligned} Var[X] &= 258 \cdot Var[X_i] \\ &= 20{,}86 \end{aligned}$$

$$P(|X| \geq 12{,}5) \leq \frac{Var[X]}{(12{,}5)^2} = \frac{20{,}86}{(12{,}5)^2} = 0{,}1335$$

2.15)

a) $C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$

b) $P(\geq 1$ gemeenschappelijk$)$

$= 1 - P($geen gemeenschappelijk$)$

$= 1 - \left(\frac{1}{251}\right)$

$= \frac{250}{251}$

c) $P(2$ gemeenschappelijk$)$

$= \frac{C_5^2 \cdot C_5^3}{251}$ -> 2 symbolen van de eerste kaart en 3 van de overgebleven 5 symbolen

$= \frac{100}{251}$

d) X -> Aantal keer winnen spel

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$

$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

Winkans $= \frac{100}{251} + \frac{1}{251} = \frac{101}{251}$ $\quad X \sim B\left(4, \frac{101}{251}\right)$

↳ 2 dezelfde ↳ 0 dezelfde

$P(X \geq 3) = 1 - \left[C_4^0 \cdot \left(\frac{150}{251}\right)^4 + C_4^1 \cdot \left(\frac{101}{251}\right)^1 \cdot \left(\frac{150}{251}\right)^3 + C_4^2 \cdot \left(\frac{101}{251}\right)^2 \left(\frac{150}{251}\right)^2\right]$

$= 1 - 0{,}818$

$= 0{,}182$

4)

2.16) $X \rightarrow$ ouder dan 50 jaar

$P(X) = 0{,}35$

P(5 gevonden op 6 pogingen)

$= (0{,}35)^5 \cdot (0{,}65)^1 \cdot C_5^1$

$= 0{,}01707$

P(5 gevonden op 5 pogingen)

$= (0{,}35)^5$

$= 0{,}00525$

P(5 gevonden op hoogstens 6)

$= 0{,}01707 + 0{,}00525$

$= 0{,}0223$

Andere Methode

$X \rightarrow$ Aantal pogingen voor 5 mensen ouder dan 50

$Y \rightarrow$ Aantal mislukkingen voor er 5 gevonden zijn

$Y \sim NB(5; 0{,}65)$

$P(X \leq 6) = P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$

$= C_4^0 \cdot (0{,}35)^5 + C_5^1 \cdot (0{,}35)^5 \cdot (0{,}65)^1$

$= 0{,}00525 + 0{,}01707$

$= 0{,}0223$

2.17) $X \sim NB(R, \theta)$ $\quad p = 1-\theta$

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^R$$

T.B.: $E[X] = \frac{R(1-p)}{p}$ $\quad Var[X] = \frac{R(1-p)}{p^2}$

$$E[X] = \alpha_1 = \frac{d}{dt}\left[M_X(t)\right]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\left(p\left(1-(1-p)e^t\right)^{-1}\right)^R\right]_{t=0}$$

$$= \underline{R\left(p\left(1-(1-p)e^t\right)^{-1}\right)^{R-1}} \cdot \frac{d}{dt}\left(p\left(1-(1-p)e^t\right)^{-1}\right)$$

$$= \underline{\checkmark \cdot p \cdot \left(-\left(1-(1-p)e^t\right)^{-2}\right)} \cdot \frac{d}{dt}\left(1-(1-p)e^t\right)$$

$$= \checkmark \cdot \left(-(1-p)e^t\right)$$

$$= R\left(p\left(1-(1-p)e^t\right)^{-1}\right)^{R-1} \cdot p\left(-\left(1-(1-p)e^t\right)^{-2}\right) \cdot (-1+p)e^t$$

$t=0$ $\Big($,

$$= R \cdot \left(\frac{p}{1-(1-p)}\right)^{R-1} \cdot p \cdot \left(\frac{-1}{\left(1-(1-p)\right)^2}\right) \cdot (-1+p)$$

$$= R \cdot \left(\frac{p}{1-(1-p)}\right)^{R-1} \cdot (-1) \cdot (1-p) \cdot p \cdot \left(\frac{-1}{p^2}\right)$$

$$= R \cdot \left(\frac{p}{p}\right)^{R-1} \cdot 1 \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{1}{p}\right)$$

$$= \frac{R(1-p)}{p}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{d^2}{dt^2} M_X(0) - \left[\frac{d}{dt} M_X(0)\right]^2$$

$(\alpha_2 - (\alpha_1)^2)$
$E[X^2] - E[X]^2$

$$= \ldots \quad \text{(VEEL PLEZIER :))}$$

$$= \frac{R(1-P)}{P^2}$$

2.18)

X -> Aantal oproepen beantwoord binnen 30 seconden

$X \sim B(1, 0{,}75)$

a) $E[X_{20}] = 20 \cdot 0{,}75$
$= 15$

b) Eerste 3 niet, dan wel
Y -> Aantal keer bellen voor opnemen $\quad Y \sim \text{Geom}(0{,}75)$

$P(Y=3)$
$= (0{,}25)^3 \cdot 0{,}75$
$= 0{,}011718$

c) $E[Y] = \frac{1-0{,}75}{0{,}75}$ (zie formularium)

$= 1/3$ -> Aantal pogingen tot 1e succes

$E[Y]+1 = 1{,}33$ -> Aantal pogingen tot en met 1e succes

d) $P(A=4)$
$= \underbrace{(0{,}75) \cdot (0{,}25)^4 \cdot C_5^1}_{\text{4 mislukkingen in alle volgordes met 1 succes}} \cdot \underbrace{0{,}75}_{\text{2e succes op einde}} = 0{,}01099$

A -> Aantal mislukt
$A \sim NB(2; 0{,}25)$

2.19) $X \to$ Tijd tot aan defect $\qquad E[X] = 25000$

$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{25000}\right)$

a) $P(X \geq 20000)$

$= 1 - P(X < 20000)$

$= 1 - \int_0^{20000} \alpha e^{-\alpha t}$

$= 1 - \left[-e^{-\alpha t}\right]_0^{20000}$ *

$= 1 - \left(-e^{-\frac{1}{25000}\cdot 20000} + 1\right)$

$= e^{-\frac{20000}{25000}}$

$= 0,4493$

$*: \int \alpha e^{-\alpha t} = \alpha \int e^{-\alpha t} \quad \downarrow u = -\alpha t$

$= \alpha \cdot -\frac{1}{\alpha} \int e^{u}$

$= -e^{u} = -e^{-\alpha t}$

b) $P(X \leq 30\,000)$

$= \left[-e^{-\frac{1}{25000}\cdot t}\right]_0^{30\,000}$

$= -e^{-\frac{30000}{25000}} + 1$

$= 0,6988$

c) $P(20000 \leq X \leq 30000)$

$= P(X \leq 30000) - P(X \leq 20000)$

$= 0,6988 - (0,4493 + 1)$

$= 0,1481$

d) $P\left(X \geq E[X] + 2\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\right)$

$= P\left(X \geq 25000 + 2\sqrt{25000^2}\right)$

$= 1 - P(X \leq 75000)$

$= 1 - \left(-e^{-\frac{75000}{25000}} + 1\right)$

$= 0,0498$

2.20) $\mu = 8 \qquad \sigma = 1$

$X \to$ Benzineverbruik / 100 km $\qquad X \sim N(8, 1^2)$

a) $P(X \leq 7)$

$= P\left(Z \leq \frac{7-8}{1}\right)$

$= P(Z \leq -1)$

$= 1 - P(Z \leq 1)$

$= 1 - 0{,}841$

$= 0{,}159$

b) $P(6 \leq X \leq 9)$

$= P(X \leq 9) - P(X \leq 6)$

$= P\left(Z \leq \frac{9-8}{1}\right) - P\left(X \leq \frac{6-8}{1}\right)$

$= P(Z \leq 1) - 1 + P(Z \leq 2)$

$= 0{,}841 - 1 + 0{,}977$

$= 0{,}818$

c) $P(X > x) = 0{,}850$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{-x+8}{1}\right) = 0{,}850$

$\Leftrightarrow \frac{-x+8}{1} = 1{,}04$

$\Leftrightarrow x = 6{,}96$

2.21) $X \to$ Snelheid auto

$P(X < 100) = 0{,}05$

$\Leftrightarrow \frac{100-\mu}{\sigma} = -1{,}64$

$\Leftrightarrow \mu = +1{,}64\sigma + 100$

$\Leftrightarrow \mu = 119{,}84$

$P(X > 130) = 0{,}20$

$\Leftrightarrow \frac{130-\mu}{\sigma} = 0{,}84$

$\Leftrightarrow \sigma = \frac{130 - (1{,}64\sigma + 100)}{0{,}84}$

$\Leftrightarrow \sigma = 12{,}097$

$P(X > 145)$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{145-119{,}84}{12{,}097}\right) = 1 - P(Z \leq 2{,}079) = 1 - 0{,}981 = 0{,}019$

2.22) Max 8 in vliegtuig P(niet opdagen | gekocht) = 0,10

k	6	7	8	9	10
kans	0,3	0,3	0,25	0,1	0,05

X → Aantal passagiers die opdagen

$P(X > 8)$

$= P(X = 9) + P(X = 10)$

$= P(9 \text{ gekocht}, 9 \text{ opdagen}) + P(10 \text{ gekocht}, 9 \text{ opdagen}) + P(10 \text{ gekocht}, 10 \text{ opdagen})$

$= 0{,}1 \cdot (0{,}9)^9 + C_{10}^1 \, 0{,}05 \cdot (0{,}9)^9 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot (0{,}9)^{10}$

$= 0{,}075547$

2.23) $Y = 1 - X^2$

$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

Stelling P 72: $Y = k(X)$:

$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(k^{-1}(y)) \left| \dfrac{d\,k^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in k(S) \\ 0 & y \notin k(S) \end{cases}$

1. Inverse Berekenen:

$X = 1 - Y^2 \iff Y^{-1} = \sqrt{-X+1} \rightarrow f_X(\sqrt{1-x}) = (3-3X)$

2. Afgeleide Berekenen:

$\dfrac{d}{dx}(1-X)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(1-X)^{-1/2} \cdot (-1) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-X}}$

3. $f_Y(y) = \begin{cases} (3-3y) \cdot \left| \dfrac{-1}{2\sqrt{1-y}} \right| & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

2.24) X → Aantal eieren gelegd $\quad p$ → Kans op vernietiging voor uitbroeden

$X \sim P(\lambda)$

Geen enkel ei → Alles wat werd gelegd is vernietigd

P(geen ei)

$$= \sum_{z=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^z}{z!} \cdot p^z$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z}{z!} \cdot p^z$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(p\lambda)^z}{z!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{z=0}^{\infty} e^{p\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{p\lambda}$$

$$= e^{-\lambda + \lambda p}$$

$$= e^{(1-p)(-\lambda)}$$

2.25) X → SO_2 concentratie

$X \sim LN(1{,}9 ; 0{,}9^2)$

$Y = \ln X \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$

$$P(5 \leq X \leq 10)$$

$$= P(\ln 5 \leq \ln X \leq \ln 10)$$

$$= P(1{,}61 \leq Y \leq 2{,}30)$$

$$= P(Y \leq 2{,}30) - P(Y \leq 1{,}61)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{2{,}30 - 0{,}5407}{\sqrt{0{,}2024}}\right) - P\left(Z \leq \frac{1{,}61 - 0{,}5407}{\sqrt{0{,}2024}}\right)$$

$$= P(Z \leq 3{,}916) - P(Z \leq 2{,}375)$$

$$= 0{,}999 - 0{,}991$$

$$= 0{,}008$$

$$E[X] = e^{\mu} + \frac{\sigma^2}{2} = 1{,}9$$

$$\Leftrightarrow \mu_Y = \ln(1{,}9) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$Var[X] = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) = 0{,}9^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_Y^2 = 0{,}2024$$

$$\mu_Y = 0{,}5407$$

2.26) $X \sim \mathcal{E}(1)$

a) $\mathrm{Med}(X) = F_X^{-1}(0{,}5) \iff \int_0^{\ln(2)} f(x) = 0{,}5$

$F_X(x) = \int \alpha e^{-\alpha x}\, dx = -e^{-\alpha x}$

$F_X(\ln(2)) = \left[-e^{-\alpha x}\right]_0^{\ln(2)} = -\frac{1}{2} - (-1)$

$= \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ ln(2) is median
want $F(\ln 2) = \frac{1}{2}$

2.26)

b-) $MAD = Med(|X - Med[X]|)$ $\qquad F_X(x) = 1 - e^{-x}$

$= Med(|X - \ln 2|)$

Stel $Y = |X - \ln 2|$

$$F_Y(y) = P(\ln 2 - y \leq X \leq \ln 2 + y)$$

$$= F_X(\ln 2 + y) - F_X(\ln 2 - y)$$

$$= (1 - e^{-\ln 2 - y}) - (1 - e^{-\ln 2 + y})$$

$$1 - e^{-\ln 2 - y} = 1 - \frac{e^{-y}}{e^{\ln 2}} = 1 - \frac{e^{-y}}{2}$$

$$1 - e^{-\ln 2 + y} = 1 - \frac{e^{y}}{e^{\ln 2}} = 1 - \frac{e^{y}}{2}$$

$$= 1 - \frac{e^{-y}}{2} - 1 + \frac{e^{y}}{2}$$

$$= \frac{e^{y}}{2} - \frac{e^{-y}}{2} = 0{,}5$$ $\rightarrow$ Med $\rightarrow F_Y(y) = 0{,}5$

Stel $z = e^y$: $\frac{1}{2}z - \frac{1}{2z} - 0{,}5 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0 \qquad D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow e^y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

(ln van negatief getal kan niet, dus $\ln\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ geen oplossing)

5)

3.1) $k = 1/60$

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

$$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + \dots + P(X=0, Y=3)$$

$$= k + 2k + 3k + 4k$$

$$= 10k$$

$$= 1/6$$

$$P(X=1) = 4k + 6k + 8k + 2k$$

$$= 2/6$$

$$P(X=2) = 9k + 12k + 3k + 6k$$

$$= 3/6$$

$$P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y)$$

$$P(Y=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0)$$

$$= k + 4k + 9k$$

$$= 14/60$$

$P(Y=1) = 2/6$ $\quad P(Y=2) = 13/60$ $\quad P(Y=3) = 12/60$

3.2) $X \to$ Aantal auto's $Y \to$ Aantal bussen

a) $P(X=1,\ Y=1)$

$= 0{,}030$

b) $P(X=1)$

$= \sum_y P(X=1,\ Y=y)$

$= P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2)$

$= 0{,}050 + 0{,}030 + 0{,}020$

$= 1/10$

c) $P(Y=1)$

$= \sum_x P(X=x,\ Y=1)$

$= 0{,}015 + 0{,}030 + 0{,}075 + 0{,}090 + 0{,}060 + 0{,}030$

$= 3/10$

d) $T \to$ Totale voertuiggrootte op de weg

$T = X + 3Y$

$P(T > 5)$

$= 1 - P(T \leq 5)$

$= 1 - \Big(\underbrace{P(X=0, Y=0)}_{P(T=0)} + \underbrace{P(X=1, Y=0)}_{P(T=1)} + \cdots + P(X=2\ Y=1)\Big)$

...

$= 1 - 0{,}62$

$= 0{,}38$

3.3)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C & (x,y) : 0 \leq x \leq 4,\ 3x^2 \leq y \leq 12x \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Dichtheidsfunctie : $\int\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x,y)\,dy\,dx = 1$

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^4\int_{3x^2}^{12x} C\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4 \Big[C \cdot y\Big]_{3x^2}^{12x} dx$$

$$= \int_0^4 C(12x - 3x^2)\,dx$$

$$= \int_0^4 C \cdot 12x\,dx - \int_0^4 C \cdot 3x^2\,dx$$

$$= 12C \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 - 3C\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

$$= 12C \cdot 8 - 3C \cdot \frac{64}{3}$$

$$= 32C = 1 \quad \rightarrow \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{32}$$

3.4)

		y	
		1	2
x	1	0,10	0,20
	2	0,30	0,40

X en Y onafhankelijk?

↳ $E[XY] = E[X]\,E[Y]$

↳ $Cov(X,Y) = 0$

$$E[X] = 1 \cdot (0{,}10 + 0{,}20) + 2 \cdot (0{,}30 + 0{,}40)$$
$$= 1{,}7$$

$$E[Y] = 1 \cdot (0{,}10 + 0{,}30) + 2 \cdot (0{,}20 + 0{,}40)$$
$$= 1{,}6$$

$$E[XY] = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}30 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}40$$
$$= 2{,}7$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$
$$= -0{,}02$$

→ Niet onafhankelijk

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$= 1^2 \cdot (0{,}10 + 0{,}20) + 2^2 (0{,}30 + 0{,}40) - 1{,}7^2$$
$$= 0{,}21$$

$$Var[Y] = 1^2 \cdot (0{,}10 + 0{,}30) + 2^2 (0{,}20 + 0{,}40) - 1{,}6^2$$
$$= 0{,}24$$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}} = \frac{-0{,}02}{\sqrt{0{,}21 \cdot 0{,}24}} = -0{,}089$$

3.5) $X \rightarrow$ Aantal wachtende klanten : $\{0, 1, \dots, 4\}$

$P(X) = \{0{,}1 ; 0{,}2 ; 0{,}3 ; 0{,}25 ; 0{,}15\}$

$Z \rightarrow$ Aantal pakjes per klant : $\{\cancel{0}, 1, 2, 3\}$

$P(Z) = \{0{,}6 ; 0{,}3 ; 0{,}1\}$

$Y \rightarrow$ Totaal aantal pakjes   Z onafhankelijk Y

a) $P(X = 3, Y = 3)$

$= P(X = 3, Y = 3, Z = 1$ voor elke klant$)$

$= (0{,}25) \cdot (0{,}6)^3$ $\rightarrow$ 3 klanten, elk 1 pakje

$= 0{,}054$

b) $P(X = 4, Y = 11)$

$= P(X = 4, Y = 11, Z = 3$ voor 3 klanten, $Z = 2$ voor 1 klant$)$

$= (0{,}15) \cdot (0{,}1)^3 \cdot (0{,}3) \cdot C_4^1$

$= 0{,}000\,18$

↳ 1 van de 4 klanten heeft 2 pakjes.

3.6) De correlatie geeft aan of een lineair verband aanwezig is in de gegevens.
Bij (X_2, Y_2) zien we op de grafiek een duidelijk lineair verband, bij (X_1, Y_1) is dit niet het geval en kunnen we geen rechte door de punten trekken.

Hierdoor zal $|Corr(X_2, Y_2)|$ een waarde hebben rond 1, en $|Corr(X_1, Y_1)|$ eerder een waarde bij 0.

$$Corr(X_2, Y_2) > Corr(X_1, Y_1)$$

3.7) $X \rightarrow$ Pollutiegraad niet-werkend

$Y \rightarrow$ Pollutiegraad wel-werkend

$$f_{X,Y}(x,y) = k\,x\,y \qquad 0<x<2, \quad 0<y<1, \quad 2y<x$$

a) Dichtheidsfunctie $\rightarrow \int\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_{2y}^2 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{2y}^2 k\,x\,y\,dx\,dy$$

$$= k\int_0^1 y\int_{2y}^2 x\,dx\,dy$$

$$= k\int_0^1 y\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{2y}^2 dy$$

$$= k\int_0^1 y(2-2y^2)\,dy$$

$$= k\left[2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 - 2\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1\right]$$

$$= k\left(\frac{1}{2}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}k \quad = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 2$$

b) $f_{X,Y}(x,y) = 2yx \quad (2y < x < 2 \ , \ 0 < y < 1)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \qquad\qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^{x/2} 2\cdot xy\,dy \qquad\qquad = \int_{2y}^{2} 2\cdot xy\,dx$$

$$= 2x\int_0^{x/2} y\,dy \qquad\qquad = 2y\int_{2y}^{2} x\,dx$$

$$= 2x\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{x/2} \qquad\qquad = 2y\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{2y}^{2}$$

$$= 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2^2} \qquad\qquad = 2y\cdot\left(2-\tfrac{1}{2}4y^2\right)$$

$$= x^3/4 \qquad\qquad = 4y(1-y^2)$$

c)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{2xy}{4y(1-y^2)} = \frac{x}{2(1-y^2)} \qquad 2y < x < 2$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{2xy}{\frac{x^3}{4}} = \frac{8y}{x^2} \qquad 0 < y < \frac{x}{2}$$

3.8)

$$P(X = k_1, Y = k_2) = \begin{cases} 1/3 & (k_1, k_2) \in \{(0,0),(1,-1),(1,1)\} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

T.B.: $\text{Corr}(X,Y) = 0$. $(\text{Cov}(X,Y) = 0)$

$$E[XY] = \frac{1}{3}\cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 1 \cdot 1$$
$$= 0$$

$$E[X] = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1$$
$$= \frac{2}{3}$$

$$E[Y] = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{3}\cdot 1$$
$$= 0$$

$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$
$$= 0 - 2/3 \cdot 0$$
$$= 0 \qquad \rightarrow \text{Corr}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}} = 0$$

$$P(X=0, Y=0) = 1/3 \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

-> X en Y zijn onderling onafhankelijk!

3.9) $P \to$ kans dat eerste kind jongen is

$R \to$ kans dat i-de kind zelfde geslacht als eerste

a) $P(X_1 = 1 \mid X_3 = 0)$

$$= \frac{P(X_1=1, X_3=0)}{P(X_3=0)}$$

$$= \frac{P(X_1=1, X_2=0, X_3=0) + P(X_1=1, X_2=1, X_3=0)}{P(X_3=0 \mid X_1=1) + P(X_3=0 \mid X_1=0)}$$

$$= \frac{P \cdot (1-R)^2 + P \cdot R \cdot (1-R)}{(1-R) \cdot P + R \cdot (1-P)}$$

$$= \frac{P \cdot (1-2R+R^2) + PR - PR^2}{P - PR + R - PR}$$

$$= \frac{P - PR + PR^2 - PR^2}{P + R - 2PR}$$

$$= \frac{P - PR}{P + R - 2PR}$$

b) $E[X_1 X_i] = P \cdot R \cdot 1 \cdot 1 + P(R-1) \cdot 1 \cdot 0 + (1-P)R \cdot 0 \cdot 0 + (1-P)(1-R) \cdot 0 \cdot 1$

$= PR$

$E[X_1] = P \cdot 1 + (1-P) \cdot 0$

$= P$

$E[X_i] = PR \cdot 1 + P(1-R) \cdot 0 + (1-P) \cdot R \cdot 0 + (1-P)(1-R) \cdot 1$

$= 2PR + 1 - R - P$

$\to$ Is 0 als $R = \frac{1}{2}$, $P = 0$ kan niet!

$\mathrm{Cov}(X_1, X_i) = E[X_1 X_i] - E[X_1]E[X_i] = P(2R - 2RP - 1 + P)$

3.10)

$P(X,Y)$	$y=0$	$y=1$	
$x=-1$	0,40	0,30	0,70
$x=1$	0,20	0,10	0,30
	0,60	0,40	

$$E[X] = 0{,}70 \cdot (-1) + 0{,}30 \cdot 1$$
$$= -0{,}4$$

$$E[Y] = 0{,}60 \cdot 0 + 0{,}40 \cdot 1$$
$$= 0{,}40$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$= 0{,}70 \cdot (-1)^2 + 0{,}30 \cdot 1 - (-0{,}40)^2$$
$$= 0{,}84$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$$
$$= 0{,}60 \cdot 0^2 + 0{,}40 \cdot 1^2 - 0{,}40^2$$
$$= 0{,}24$$

$$Cov(X,Y) = \sum_x \sum_y (x - E[x])(y - E[y]) \, P(X=x, Y=y)$$
$$= (-1-(-0{,}4))(0-0{,}4) \cdot 0{,}40 + (1-(-0{,}4))(0-0{,}4) \cdot 0{,}20$$
$$+ (-1-(-0{,}4))(1-0{,}40) \cdot 0{,}30 + (1-(-0{,}4))(1-0{,}4)\, 0{,}10$$
$$= \frac{12}{125} + \frac{-14}{125} + \frac{-27}{250} + \frac{21}{250}$$
$$= -0{,}04$$

$$Corr(3X+Y, 2Y) = \frac{Cov(3X+Y, 2Y)}{\sqrt{Var[3X+Y] \; Var[2Y]}}$$
$$= \frac{3 \cdot 2\, Cov(X,Y) + 1 \cdot 2\, Cov(Y,Y)}{\sqrt{(3^2\, Var[X] + 1^2\, Var[Y] + 2 \cdot 3\, Cov(X,Y)) \cdot 2^2\, Var[Y]}}$$
$$= \frac{6\, Cov(X,Y) + 2\, Var[Y]}{\sqrt{(9\, Var[X] + Var[Y] \cdot 6\, Cov(X,Y))\, 4\, Var[Y]}} = 0{,}0891$$

6

4.1) X → werkelijke inhoud fles $X \sim N(328, 3^2)$

a) $P(X \leq 325)$

$= P(Z \leq \frac{325-328}{3})$

$= P(Z \leq -1)$

$= 1 - P(Z \leq 1)$

$= 1 - 0,841$

$= 0,159$

b) $\overline{X_n}$ → gemiddelde inhoud in pak van 6 flesjes per flesje

$E[\overline{X_n}] = E[X] = 328$

$Var[\overline{X_n}] = \frac{Var[X]}{6} = \frac{3^2}{6} = 1,5$

$\overline{X_6} \sim N(328, (\sqrt{1,5})^2)$

↳ Voor 1 flesje uit pak van 6

$P(X_n \leq 325)$

$= P(Z \leq \frac{325-328}{\sqrt{1,5}})$

$= P(Z \leq -2,449)$

$= 1 - P(Z \leq 2,449)$

$= 1 - 0,993$

$= 0,007$

4.2) $\overline{X}$ → Gemiddelde NO_x-gehalte $X \sim N(1,4 ; 0,3^2)$

$\overline{X} \sim N(1,4 ; \frac{0,3^2}{125})$

$P(\overline{X} > L) = 0,01$

$\Leftrightarrow P(\overline{X} \leq L) = 0,99$

$\Leftrightarrow \frac{L - 1,4}{\sqrt{\frac{0,3^2}{125}}} = 2,34$ → $L = 1,4627$

4.3) $p = 0{,}5106$ $n = 1000$ $X \to$ Stemmen Obama uit opiniepeiling

$$P(X < 500)$$

$pn = 510{,}6 \geq 5$
$(1-p)n = 489{,}4 \geq 5$

$$X \sim N(\underbrace{510{,}6}_{np} ; \underbrace{249{,}9}_{npq})$$

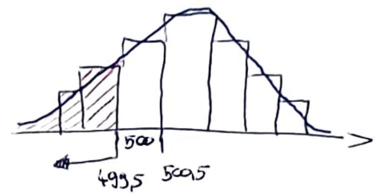
$= P(X \leq 499{,}5)$ CONTINUÏTEITS CORRECTIE !

$$= P\left(Z \leq \frac{499{,}5 - 510{,}6}{\sqrt{249{,}9}}\right)$$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}7022)$

$= 1 - 0{,}758$

$= 0{,}242$



Overgang Discreet $\to$ Continu

$\Rightarrow$ Continuïteitscorrectie Toepassen

4.4) $Y \sim B(16; 0{,}5)$

$P(Y \leq 5)$ OP 4 MANIEREN BEREKENEN :

① EXACT

$$P(Y \leq 5) = P(Y=0) + P(Y=1) + \dots + P(Y=5)$$

$$= C_{16}^{0} \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^{16} + C_{16}^{1} \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^{15} + \dots + C_{16}^{5} \cdot (0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^{11}$$

$= 0{,}105057$

② POISSON BENADERING

$$B(16; 0{,}5) \simeq P(16 \cdot 0{,}5) = P(8)$$

$$P(Y \leq 5) = P(Y=0) + P(Y=1) + \dots + P(Y=5)$$

$$= e^{-8} \frac{8^0}{0!} + e^{-8} \frac{8^1}{1!} + \dots + e^{-8} \frac{8^5}{5!}$$

$= 0{,}19124$

③ NORMALE BENADERING ZONDER CORRECTIE

$$B(16; 0{,}5) \simeq N(16 \cdot 0{,}5 \; ; \; 16 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5) = N(8, 4)$$

$$P(Y \leq 5) = P\left(Z \leq \frac{5-8}{\sqrt{4}}\right)$$

$$= P(Z \leq -1{,}50)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}50)$$

$$= 1 - 0{,}933$$

$$= 0{,}067$$

④ NORMALE BENADERING MET CORRECTIE

$$B(16; 0{,}5) \simeq N(8, 4)$$

$$P(Y \leq 5) = P(Y \leq 5{,}5)$$ → CONTINUÏTEITS CORRECTIE

$$= P\left(Z \leq \frac{5{,}5-8}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= P(Z \leq -1{,}25)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}25)$$

$$= 1 - 0{,}894$$

$$= 0{,}106$$

Beste Benadering?

↳ Normale benadering met correctie. Bij deze benadering zijn de voorwaarden voldaan:

$$\left.\begin{aligned} n \cdot p &= 8 \\ n \cdot (1-p) &= 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow Y \sim N(8, 4)$$

Voor de Poisson-benadeing zijn de voorwaarden niet voldaan: $n \geq 30$ klopt niet.

4.5) $X \to$ Aantal studenten toelating oanvaard

$X \sim B(1500; 0{,}70)$

a)

$$\left.\begin{array}{r} n \cdot p = 1050 \\ n(1-p) = 450 \end{array}\right\}$$ Voorwaarden oké $\to X \sim N(1050, 315)$

$E[X] = 1050$

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$
$= \sqrt{315}$
$= 17{,}75$

CONTINUÏTEITS CORRECTIE

b) $P(X \geq 1000)$
$= P(X \geq 999{,}5)$
$= 1 - P(X \leq 999{,}5)$
$= 1 - P(Z \leq \frac{999{,}5 - 1050}{\sqrt{315}})$
$= 1 - P(Z \leq -2{,}85)$
$= 1 - (1 - P(Z \leq 2{,}85))$
$= 1 - (1 - 0{,}998)$
$= 0{,}998$

c) $P(X > 1200)$
$= P(X \geq 1200{,}5)$
$= 1 - P(X \leq 1200{,}5)$
$= 1 - P(Z \leq \frac{1200{,}5 - 1050}{\sqrt{315}})$
$= 1 - P(Z \leq 8{,}479)$
$\approx 1 - 1$
$= 0$

d)

$$\left.\begin{array}{r} n \cdot p = 1190 \\ n \cdot (1-p) = 510 \end{array}\right\}$$ Voorwaarden oké $\to X \sim N(1190, 357)$

$P(X > 1200)$
$= P(X \geq 1200{,}5)$
$= 1 - P(X \leq 1200{,}5)$
$= 1 - P(Z \leq \frac{1200{,}5 - 1190}{\sqrt{357}})$
$= 1 - P(Z \leq 0{,}556)$
$= 1 - 0{,}712$
$= 0{,}288$

4.6) X → Gewicht door rigst $X \sim N(50, 5^2)$

a) $n = 995$ → $X_{995} \sim N(50, \frac{5^2}{995})$

$\sim N(50; 0{,}025)$

$P(X_{995} > \frac{50\,000}{995})$

$= 1 - P(X_{995} \leq 50{,}25)$

$= 1 - P(Z \leq \frac{50{,}25 - 50}{\sqrt{0{,}025}})$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}58)$

$= 1 - 0{,}943$

$= 0{,}057$

b) $P(X_x > \frac{50\,000}{x}) \leq 0{,}001$

$\Leftrightarrow 1 - P(X_x \leq \frac{50000}{x}) \leq 0{,}001$

$\Leftrightarrow P(X_x \leq \frac{50000}{x}) \geq 0{,}999$

$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{\frac{50000}{x} - 50}{\sqrt{0{,}025}}) \geq 0{,}999$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{50000}{x} - 50}{\sqrt{0{,}025}} \geq 2{,}97$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 2{,}97\sqrt{0{,}025} + 50 \cdot 50\,000^{-1}$

$\Leftrightarrow x \leq 990{,}707$ → Maximaal 990 blokken

4.7) $X \to$ Meetfout in cm

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$T_{25} \to$ Meetfout van gemiddelde X_{25} bij 25 metingen

$$P(|T_{25}| \leq c) = 0{,}99$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\, x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (1+x) x \, dx + \int_{0}^{1} (1-x) x \, dx$$

$$= 0$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 (1-|x|)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\, dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} - \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{-1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1/6$$

$$X \sim N(0, 1/6) \xrightarrow{CLS} T_{25} \sim N\left(0, \frac{1/6}{25}\right)$$

$P(|T_{25}| \leq c)$

$= P(-c \leq T_{25} \leq c)$

$= P(T_{25} \leq c) - P(T_{25} \leq -c)$

$= P(T_{25} \leq c) - (1 - P(T_{25} \leq c))$

$= 2P(T_{25} \leq c) - 1 = 0{,}99$

$\Leftrightarrow \quad P(T_{25} \leq c) = 0{,}995$

$\Leftrightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{c-0}{\sqrt{\frac{1/6}{25}}}\right) = 0{,}995$

$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{0{,}0816} = 2{,}58$

$\Leftrightarrow \quad c = 0{,}2105$

4.8) $X \rightarrow$ Bedrag in rol

x	49	50	51
$P(X=x)$	0,30	0,60	0,10

$E[X] = \sum_x x\, P(X=x)$

$= 49 \cdot 0{,}30 + 50 \cdot 0{,}60 + 51 \cdot 0{,}10$

$= 49{,}8$

$E[X^2] = 49^2 \cdot 0{,}30 + 50^2 \cdot 0{,}60 + 51^2 \cdot 0{,}10$

$= 2480{,}4$

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$= 2480{,}4 - (49{,}8)^2$

$= 0{,}36$

$X \sim N(49{,}8\,;\, 0{,}36) \qquad X_{100} \sim N\left(49{,}8\,;\, \frac{0{,}36}{100}\right)$

a) 25 cent verlies op 100 rollen
→ gemiddeld 0,25 verlies en dus waarde van 49,75

$P(X \leq 49{,}75) = P(X \leq 49{,}745)$ → CONTINUITEITS CORRECTIE

$= P\left(Z \leq \frac{49{,}745 - 49{,}80}{\sqrt{\frac{0{,}36}{100}}}\right)$

$= P(Z \leq -0{,}9167)$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}9167)$

$= 1 - 0{,}821$

$= 0{,}179$

b) $X \sim N(49{,}8\ ;\ 0{,}36) \xrightarrow{CLS} S_n \sim N(49{,}8n\ ,\ \sqrt{0{,}36}\sqrt{n})$
$\sim N(49{,}8n\ ,\ 0{,}6\sqrt{n})$

$P(S_n < 50n)$

$= P\left(Z \leq \frac{50n - 49{,}8n - 0{,}5}{0{,}6\sqrt{n}}\right)$

$= P\left(Z \leq \frac{0{,}2n - 0{,}5}{0{,}6\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$

$\Leftrightarrow \quad \frac{0{,}2n - 0{,}5}{0{,}6\sqrt{n}} = 2{,}31$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}2n - 0{,}5 - 1{,}386\sqrt{n} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}04n^2 - 2{,}15n + 0{,}25 = 0$

$\Leftrightarrow \quad n_{1,2} = \frac{2{,}15 \pm \sqrt{2{,}15^2 - 4 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}25}}{2 \cdot 0{,}04}$ — $n_1 = 0{,}113$; $n_2 = 53{,}6$

→ Bank moet minstens 54 rollen inzamelen

4.9) $n = 120$ $p = 1/3$

$X \rightarrow$ Aantal mensen die kaaskroket kopen

$X_{120} \sim N(\underbrace{40}_{np};\ \underbrace{26{,}7}_{npq})$

$P(X_{120} > x) \leq 0{,}2$

$\Leftrightarrow 1 - P(X_{120} \leq x) \leq 0{,}20$

$\Leftrightarrow P(X_{120} \leq x) \geq 0{,}80$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{x + 0{,}5 - 40}{\sqrt{26{,}7}}\right) \geq 0{,}80$

$\Leftrightarrow \frac{x - 39{,}5}{\sqrt{26{,}7}} \geq 0{,}84$

$\Leftrightarrow x \geq 43{,}84$ $\rightarrow$ minstens 44 flessen

4.10) $X \rightarrow$ kleur getrokken kaart

$\#(X = \text{Rood}) = \#(X = \text{groen}) = \#(X = \text{Geel}) = \#(X = \text{Blauw}) = 10$

a) 4 elk verschillende kleur MET TERUGLEGGING!

$$P = \frac{C^1_{10} \cdot C^1_{10} \cdot C^1_{10} \cdot C^1_{10}}{C^4_{40}} = \frac{10000}{91390} = 0{,}10942$$

Alternatief:

$$P = \frac{40}{40} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{10}{37} = 0{,}10942$$

b) $Y \rightarrow$ Aantal keer winnen $n = 50$ $p = 0{,}109$

$\left.\begin{array}{r} np = 5{,}45 \\ n(1-p) = 44{,}55 \end{array}\right|$ OK $\rightarrow Y \sim N(5{,}45;\ 4{,}86)$

$P(Y_{50} \leq 6)$

$= P(Y_{50} \leq 6{,}5)$

$= P\left(Z \leq \frac{6{,}5 - 5{,}45}{\sqrt{4{,}86}}\right)$

$= P(Z \leq 0{,}47)$

$= 0{,}681$