

Klassieke examen 1ste zit 2024

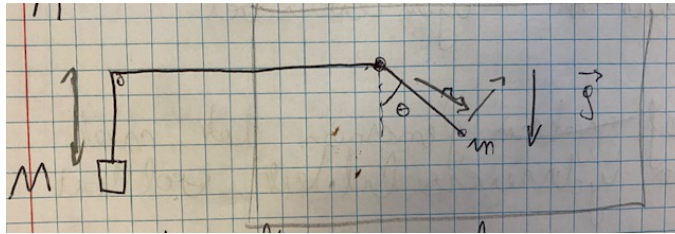
prof. Thomas Van Riet

19/01/2024

Note: Er is geen garantie op de correctheid van de korte antwoorden dit is gewoon wat ik had

1 Vraag 1 [8pt]

Gegeven is een swinging Atwood machine (zie figuur 1). M kan enkel verticaal naar boven en naar beneden bewegen en dus niet slingeren. m beweegt in het verticaal vlak en kan dus wel slingeren, ook is de lengte van de slinger r variabel. De lengte van het touw is onveranderlijk. Verwaarloos weerstand en inertie van de katrollen.



Figuur 1: Schets swinging Atwood machine.

1. Geef de Hamiltoniaan in functie van $p_r, r, p_\theta, \theta, g, M, m$. [3pt]
2. Neem nu m in een horizontaal vlak in plaats van een verticaal vlak. In dit horizontaal vlak kan het wrijvingsloos bewegen. Vind de nodige hoekfrequentie ω opdat r constant blijft doorheen de tijd. [2pt]
3. Er was zo een heel lange vergelijking $J = \dots$ waarvan je moest aantonen dat dit een constante van de beweging was. Ma dit was echt heel veel werk en echt ni de moeite waard om uit te rekenen. [3pt]

Oplossing.

1. zie https://en.wikipedia.org/wiki/Swinging_Atwood%27s_machine daar staan de Lagrangiaan en Hamiltoniaan opgeschreven
2. Potentiële energie van m valt weg, los Euler-Lagrange vergelijkingen op en $\dot{\theta}$ is de ω die je zoekt. Merk op dat p_θ constant is. Dan bekomt men $\dot{\theta} = \omega = \sqrt{\frac{Mg}{mr}}$. Je kan dit ook simpelweg met newton krachten oplossen (centripetaalkracht = zwaartekracht op M)
3. N.A.

2 Vraag 2 [5pt]

Veelvoorkomende vraag: twee deeltjes m_1 en m_2 zijn onder invloed van elkaars zwaartekracht en zijn initieel op afstand d van elkaar. Vind de voorwaardes voor de grootte *en* de richting van de relatieve snelheidsvector $\dot{r}_1 - \dot{r}_2$ opdat de deeltjes oneindig ver van elkaar weg zullen bewegen. [5pt]

oplossing.

Er geldt behoud van energie. Neem een van de twee deeltjes stilstaand dan moet je de andere met gereduceerde massa μ en de relatieve snelheidsvector $\dot{r}_1 - \dot{r}_2$ beschouwen. je maakt best een tekening om dit in te zien. Ontsnappingsvoorwaarde is $E \geq 0$. Dan krijg je voor de initiële energie :

$$E = \frac{1}{2}\mu|\dot{r}_1 - \dot{r}_2|^2 - \frac{Gm_1m_2}{d} \quad (1)$$

De angulaire momentum term is afwezig aangezien $\dot{r} \neq \dot{r}_1 - \dot{r}_2$ en we dus nog in 2D werken. Dan krijgt men

$$|\dot{r}_1 - \dot{r}_2| \geq \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{d}} \quad (2)$$

Dus voor de richting is er geen voorwaarde.

3 Vraag 3 [4pt]

Gegeven volgende abstracte tijdsafhankelijke Hamiltoniaan H van één variabele q en zijn bijhorend momentum p met a en b constanten:

$$H = ap^2 + bp + V(q) \quad (3)$$

1. Vind de voorwaarden voor a en b opdat $q(t)$ tijdsreversibel is. Tijdsreversibel wilt zeggen dat als $q(t)$ een oplossing is van de Hamiltoniaan, dat $q(-t)$ ook een oplossing is. Probeer dit goed te begrijpen. Bijvoorbeeld een balletje in de lucht werpen is een voorbeeld van een reversibel proces.
2. Vind de algemene voorwaarden voor een tijdsafhankelijke Hamiltoniaan van één variabele q opdat de oplossingen reversibel zijn.
3. geef een voorbeeld van een fysisch fenomeen waar tijdsreversibiliteit gebroken wordt.

oplossing. Deze ben ik wel echt ni zo zeker van

1. Omdat $q(-t) = -q(t)$ geldt dat $p(-t) = -p(t)$. Dan willen we dat $H(q, p) = H(q, -p)$ (zodanig dat deze beide dezelfde oplossingen $q(-t)$ en $q(t)$ geven). Dus moet $b = 0$. Voor a is er geen voorwaarde.
2. Zoals hierboven vermeld moet $H(q, p) = H(q, -p)$ dus moet H even zijn in p .
3. processen waar entropie stijgt zijn niet tijdsreversibel (zie thermodynamica). Bijvoorbeeld een auto die door te remmen tot stilstand komt. Hier komt de kinetische energie als warmte vrij.

4 Vraag 4 [3 pt]

note: dit is eerder algebra dan mechanica maar oke. Gegeven een functie W afhankelijk van N variabelen. Neem $i = 1, \dots, N$ dan is er gegeven dat voor elke variabele x^i van W geldt dat:

$$\dot{x}^i = \sum_j -a^{ij} \frac{\partial W}{\partial x^j} \quad (4)$$

met $j = 1, \dots, N$ en a^{ij} het element op de i -de rij en j -de kolom van een symmetrische, positief definitie matrix A . Bewijs dat W nooit zal groeien in de tijd.

oplossing.

Zoals in hoofdstuk zeven bij de kinetische energie matrix kunnen we nieuwe coördinaten y^i kiezen zodat A diagonaal is, dus $a^{ij} = \delta_j^i \lambda_i$. Bovendien is $\lambda_i > 0$ vanwege de eigenschappen van A . Dan geldt voor $\dot{y}^i$:

$$\dot{y}^i = -\lambda_i \frac{\partial W}{\partial y^i} \quad (5)$$

Nu zal W nooit groeien als $\frac{dW}{dt} \leq 0$. Er geldt dat

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial y^i} \dot{y}^i = \sum_i -\lambda_i \left(\frac{\partial W}{\partial y^i} \right)^2 \leq 0 \quad (6)$$