Examen Analyse II
Tweede bachelor wiskunde
22 januari 2007

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Je hebt al vaak te horen gekregen dat de bepaalde integraal van een functie gegeven wordt door de oppervlakte onder de grafiek. Neem nu $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ een positief meetbare functie. Definieer het gebied onder de grafiek van f als

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < f(x)\} .$$

Bewijs dat

$$\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda .$$

2. Beschouw de functie

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : f(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} \operatorname{Bgtg}(x) \, dx .$$

Bewijs eerst dat f continu is in de punten $y \neq 0$. Bewijs vervolgens dat f discontinu is in 0. Dit laatste is een stuk moeilijker en je kan hiervoor de verandering van veranderlijken $x \mapsto x/y$ gebruiken.

3. Geef de best mogelijke benadering in L^2-norm (in de Hilbertruimte $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \lambda)$) voor de functie $f(x) = x$ als lineaire combinatie van de functies $e(x) = \sin x$ en $h(x) = \cos(3x)$.

4. Voor welke waarden van $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ is de functie

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\alpha - \cos x}{x^\beta}$$

integreerbaar?

5. Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ en het vectorveld $\mathbf{V}$ gegeven door

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 + z = 1\}$$
$$\mathbf{V}(x, y, z) = (0, x, 0)$$