

Examen Kwantummechanica

11 juni 2024

1. Leg kort uit.

- (a) Kan je de excitaties van een atoom verklaren aan de hand van een tijdsafhankelijke Hamiltoniaan? Wat als de Hamiltoniaan tijdsafhankelijk is?
- (b) In de klassieke mechanica kan je zonder dat er iets verandert een constante bij de potentiaal optellen. Kan dit ook in de kwantummechanica – verandert er *niets*?
- (c) Kan je de Schrödingervergelijking gebruiken om de planeten in het zonnestelsel te beschrijven?
- (d) Stel dat we een waterstofatoom hebben en we perturberen de Hamiltoniaan met een perturbatie evenredig met $\vec{L} \cdot \vec{S}$. Beschrijf je dat best in de eigenbasis van L^2 of S^2 , of met een andere basis?

2. Een deeltje is beperkt tot het interval $[0, a]$ met initiële golffunctie

$$\psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a).$$

Volgende identiteit was ook gegeven:

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

- (a) Bepaal A .
 - (b) Schrijf de tijdsevolutie van ψ .
 - (c) Wat is de kans om het deeltje in de grondtoestand te vinden op tijdstip t ?
 - (d) Bereken $\langle E \rangle$. Is dit tijdsafhankelijk?
3. De golffunctie van een elektron in een waterstofatoom is gegeven door

$$\psi(\vec{r}) = A \left[\left(\psi_{211}(\vec{r}) + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \psi_{21-1}(\vec{r}) \right) (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \psi_{321}(\vec{r}) (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \right].$$

- (a) Bepaal A .

- (b) Je meet $\hat{L}_z$. Wat zijn de mogelijke uitkomsten en hun kansen?
 (c) Stel dat je $\hbar$ meet voor $\hat{L}_z$. Wat is de golffunctie na de meting?

4. Gegeven zijn de Hamiltoniaan en perturbatie

$$H_0 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & V & 0 & 0 \\ V & 0 & V & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \end{pmatrix},$$

met E en V positieve getallen. Bereken het spectrum van de *totale* Hamiltoniaan voor

- (a) $V = 0$ (exact)
 (b) $0 < V \ll E$ (perturbatief, eerste orde)
 (c) $V \gg E$

Maak een schets van de energie-eigenwaarden in functie van V .

5. We hebben een 1D harmonische oscillator die zich op $t = -\infty$ in de grondtoestand bevindt. We brengen een storing

$$\hat{H}_1 = -e\mathcal{E}\hat{x}e^{-t^2/\tau^2}$$

aan. Bereken de kans dat het systeem in de toestand $|n\rangle$ is op $t = \infty$, in eerste orde van $\mathcal{E}$. Gebruik

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/\tau^2} e^{i\omega t} dt = \sqrt{\pi\tau^2} e^{-\omega^2\tau^2/4}.$$

Het kan handig zijn om te werken met ladderoperatoren:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned}$$