Examen Lineaire Algebra Wiskunde en Fysica

25 januari 2018

1. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionele vectorruimte en $L : V \to V$ een lineaire afbeelding met verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ en bijbehorende eigenvectoren$v_1, v_2, \ldots, v_k$. Bewijs dat $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ lineair onafhankelijk is.

   (10 punten)

2. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $L : V \to V$ een bijectieve lineaire afbeelding. Bewijs dat de inverse van L ook lineair is.

   (5 punten)

3. Waar of fout, motiveer nauwkeurig.

   a) Zij $f : V_1 \to V_2$ een injectieve lineaire afbeelding en $g : V_2 \to V_3$ een surjectieve lineaire afbeelding. Veronderstel dat $\ker g = \operatorname{Im} f$ dan is $\operatorname{Dim} V_1 + \operatorname{Dim} V_3 = \operatorname{Dim} V_2$

   b) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct. Als voor alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $\langle AX, Y\rangle = \langle BX, Y\rangle$ dan is $A = B$.

   c) Zijn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een diagonaliseerbare matrix en $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ zodat $A^k = 0$ dan is $A = 0$.

   (10 punten)

4. Zij $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : X \mapsto A \cdot X$ een lineaire afbeelding met

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

   a) Voor welke waarden van a, b, c is L_A een injectie.

   b) Vind de eigenwaarden van A in functie van a, b, c. Voor welke waarden van a, b, c is A diagonaliseerbaar?

   (10 punten)

5. Zij $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Als $D \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ dan definiëren we $W_D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \text{ als } i \notin D\}$

   a) Bewijs dat voor alle $D \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ W_D een deelruimte is van R^n. Vind de dimensie van W_D.

   b) Zij $D_1, D_2 \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ disjuncte verzamelingen. Bewijs dat $W_{D_1\cup D_2} = W_{D_1} \oplus W_{D_2}$

   (10 punten)