Examen Lineaire Algebra

24 januari 2019

1 Vraag 1 (10pt)

Bewijs de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen: als $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten zijn, waarvan V eindigdimensionaal is, en als $L : V \to W$ een lineaire afbeelding is, dan geldt dat $dim_{\mathbb{R}}(V) = dim_{\mathbb{R}}(ker(L)) + dim_{\mathbb{R}}(Im(L))$.

2 Vraag 2 (5pt)

Zij $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ een Hermitische matrix, wat wil zeggen dat $A^T = \bar{A}$. Bewijs dat alle nulpunten van de karakteristieke veelterm φ_A reëel zijn.

3 Vraag 3 (10pt)

Waar of fout? Argumenteer nauwkeurig.

(a) Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en zij L_1 en L_2 lineaire afbeeldingen van V naar V. Als L_1 en L_2 beide diagonaliseerbaar zijn, dezelfde eigenwaarden hebben en ook dezelfde bijhorende eigenruimten hebben, dan is $L_1 = L_2$.

(b) Voor alle matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2x2}$ geldt dat $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

(c) Zij V een vectorruimte en veronderstel dat $\{u_1, u_2, u_3\}$ en $\{w_1, w_2, w_3\}$ vrije deelverzamelingen van V zijn. Als $vct\{u_1, u_2, u_3\} \cap vct\{w_1, w_2, w_3\} = \{0\}$, dan is $\{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3\}$ nog steeds vrij.

4 Vraag 4 (10pt)

Zij $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiëer de lineaire afbeelding $L : V \to V$ gegeven door $L(P(X)) = \alpha P(X) + (X+1)P'(X)$. Bewijs dat L diagonaliseerbaar is en bepaal de matrixvoorstelling van L ten opzichte van een basis van eigenvectoren.

5 Vraag 5 (10pt)

5.1 Wiskunde & Fysica

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte. We noteren pr_U voor de loodrechte projectie op een deelvectorruimte U van V.

1. Zij U en W twee deelvectorruimten van V met $U \subseteq W \subseteq V$. Bewijs dat $pr_U = pr_U \circ pr_W$.

2. Zij U en W twee willekeurige deelvectorruimten van V. Geldt de gelijkheid $pr_U \circ pr_W = pr_W \circ pr_U$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

5.2 Informatica

Zij $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2019}$. Op de vectorruimte V definiëren we het inproduct $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.
(a) Bepaal een orthonormale basis van de deelruimte $U = vct\{1, X\}$.
(b) Bepaal de loodrechte projectie van de veelterm X^5 op de deelruimte U.