LaTeX opdracht Bewijzen en Redeneren
1ste fase bachelor in Fysica, Wiskunde

- Werk de volgende opdracht **individueel** uit. U **moet** hier alleen aan werken. Geef ook geen files door aan anderen. Ingediende opdrachten die te zeer op elkaar lijken worden met 0 beoordeeld.
- Maak een `tex`-bestand met de naam `Achternaam-Voornaam.tex`. **Deze naamgeving is verplicht.** Compileer je tekst naar een `pdf`-bestand, en mail zowel het `tex`- als het `pdf`-bestand door naar
  - Prof. Arno Kuijlaars (`arno.kuijlaars@wis.kuleuven.be`) en
  - de monitor Dr. An Speelman (`an.speelman@wis.kuleuven.be`).
- De LaTeXopdracht telt voor 2 punten mee (op 20) voor het examen van Bewijzen en Redeneren.
- Uiterste indiendatum is **zaterdag 23 november 2013** om 24 uur.

Let bij het gebruik van LaTeX zeker op de volgende punten. Hiermee zullen we bij de quotering rekening houden.

- Maak de kop van uw document met `\title` en `\author`. Vermeld bij `\author` ook uw studentennummer.
- Voorzie een aantal gecentreerde formules van een nummer. Zorg ervoor dat tenminste één keer naar een formule terugverwezen wordt. Gebuik de LaTeX commando's `\label` en `\ref`.
- Maak een referentielijst waarin u de literatuur vermeldt die u gebruikt. Als u een resultaat uit de cursus gebruikt, vermeld dat dan en neem in dat geval de cursustekst op in de lijst van referenties. Verwijs naar de referenties met het commando `\cite`.
- Er is nog geen standaardmanier om naar webpagina's te verwijzen. Voor richtlijnen hierrond, zie `www.reading.ac.uk/library/finding-info/guides/lib-citing-web.aspx`
- Zorg ervoor dat uw tekst een op zichzelf staand document is dat gelezen kan worden door iemand die deze opdracht niet kent. Maak goede en volledige zinnen.

1. Georg Cantor

Georg Cantor was een Duits wiskundige die gewerkt heeft aan de grondslagen van de wiskunde. Hij heeft onder meer de basis gelegd voor de verzamelingenleer zoals we die nu kennen.

Opdracht 1 Geef een korte beschrijving van het leven en werk van Cantor. Informatie hierover is te vinden in boeken, artikels en op het internet. Gebruik minstens twee onafhankelijke bronnen en geef referenties naar de bronnen die je gebruikt. Zorg ervoor dat je beschrijving niet meer dan 30 regels bedraagt.

2. De stelling van Cantor-Bernstein-Schröder

De stelling van Cantor-Bernstein-Schröder kan gebruikt worden om aan te tonen dat twee verzamelingen equipotent zijn.

Opdracht 2 (a) Formuleer en bespreek de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder. Gebruik zoveel mogelijk je eigen bewoordingen.

(b) Gebruik de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder om aan te tonen dat de verzameling $\mathbb{R}$ van alle reële getallen en het interval $[0, 1]$ equipotent zijn.

(c) Geef een expliciete uitdrukking voor een bijectie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en bewijs dat dit inderdaad een bijectie is.

3. Bonusvraag: Is $\mathbb{C}$ groter dan $\mathbb{R}$?

We kennen de getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ waarvoor geldt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

In de cursus hebben we gezien dat $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ aftelbaar zijn en dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is. Voor de kardinaliteiten geldt dus

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q}) < \mathrm{card}(\mathbb{R}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{C}).$$

We vragen ons nu af hoe de kardinaliteit van $\mathbb{C}$ zich verhoudt ten opzichte van die van $\mathbb{R}$. Dat wil zeggen, de vraag is of $\mathbb{C}$ equipotent is met $\mathbb{R}$ of niet.

Omdat we $\mathbb{C}$ kunnen identificeren met $\mathbb{R}^2$, komt dit neer op de vraag of $\mathbb{R}^2$ equipotent is met $\mathbb{R}$ of niet. Omdat $\mathbb{R}$ equipotent is met $[0,1]$ (zie vorige opdracht) is een equivalente vraag of het vierkant $[0,1] \times [0,1]$ equipotent is met het lijnstuk $[0,1]$.

Dit blijkt inderdaad zo te zijn en het is mogelijk om dit aan te tonen met de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder.

Opdracht 3 De opdracht is om een bewijs te vinden dat $\mathbb{C}$ equipotent is met $\mathbb{R}$ en vervolgens de stelling met het bewijs netjes en overzichtelijk op te schrijven, waarbij ook het idee van het bewijs goed uitgelegd wordt.

U kunt voor deze opdracht inspiratie vinden op verschillende webpagina's en discussiefora op het internet, bv. op de webpagina:

`math.stackexchange.com/questions/183361/`
`examples-of-bijective-map-from-mathbbr3-rightarrow-mathbbr`

Let op dat niet alles wat op discussiefora gezegd wordt correct is!

Omdat dit een bonusvraag is, wordt deze opdracht streng nagekeken. Uw oplossing moet in alle opzichten in orde zijn, anders trekken we punten af. Geef zoals altijd goede verwijzingen naar de bronnen die je gebruikt.