LaTeX opdracht Bewijzen en Redeneren
1ste fase bachelor in Fysica, Wiskunde

- Werk de volgende opdracht **individueel** uit. U **moet** hier alleen aan werken. Geef ook geen files door aan anderen. Ingediende opdrachten die te zeer op elkaar lijken worden met 0 beoordeeld.
- Maak een `tex`-bestand met de naam `Achternaam-Voornaam.tex`. **Deze naamgeving is verplicht.** Compileer je tekst naar een `pdf`-bestand, en mail zowel het `tex`- als het `pdf`-bestand door naar
  - Prof. Arno Kuijlaars (`arno.kuijlaars@wis.kuleuven.be`) en
  - de monitor Dr. An Speelman (`an.speelman@wis.kuleuven.be`).
- De LaTeXopdracht telt voor 2 punten mee (op 20) voor het examen van Bewijzen en Redeneren.
- Uiterste indiendatum is **zaterdag 21 november 2015** om 24 uur.

Let bij het gebruik van LaTeX zeker op de volgende punten. Hiermee zullen we bij de quotering rekening houden.

- Maak de kop van uw document met `\title` en `\author`. Vermeld bij `\author` ook uw studentennummer.
- Voorzie een aantal gecentreerde formules van een nummer. Zorg ervoor dat tenminste één keer naar een formule terugverwezen wordt. Gebuik de LaTeX commando's `\label` en `\ref`.
- Maak een referentielijst waarin u de literatuur vermeldt die u gebruikt. Als u een resultaat uit de cursus gebruikt, vermeld dat dan en neem in dat geval de cursustekst op in de lijst van referenties. Verwijs naar de referenties met het commando `\cite`.
- Er is nog geen standaardmanier om naar webpagina's te verwijzen. Voor richtlijnen hierrond, zie `http://libguides.reading.ac.uk/citations`
- Zorg ervoor dat uw tekst een op zichzelf staand document is dat gelezen kan worden door iemand die deze opdracht niet kent. Maak goede en volledige zinnen.

Airyfunctie

1. George Biddell Airy

Sir George Biddell Airy was een Engels wiskundige en sterrenkundige uit de negentiende eeuw. Hij heeft belangrijk werk gedaan rond planeetbanen. In de wiskunde is hij voornamelijk bekend vanwege de Airy differentiaalvergelijking en de Airyfuncties die naar hem zijn genoemd.

Opdracht 1 Geef een korte beschrijving van het leven en werk van Airy. Informatie hierover is te vinden in boeken, artikels en op het internet. Gebruik minstens twee onafhankelijke bronnen en geef referenties naar de bronnen die je gebruikt. Zorg ervoor dat uw beschrijving niet meer dan 30 regels bedraagt.

2. De Airyfunctie

De Airyfunctie Ai wordt gedefinieerd door

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \tag{1}$$

Deze integraal is een oneigenlijke integraal die opgevat moet worden als limiet

$$\mathrm{Ai}(x) = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^b \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt. \tag{2}$$

De limiet bestaat voor elke waarde van x, zoals bijvoorbeeld volgt met partiële integratie.

De Airyfunctie (1) voldoet aan de differentiaalvergelijking van Airy:

$$y'' = xy. \tag{3}$$

Het is een oplossing van (3) die naar 0 gaat op oneindig:

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Ai}(x) = 0. \tag{4}$$

De Airyfunctie $\mathrm{Ai}(x)$ heeft oneindig veel negatieve nulpunten en is strikt positief voor positieve waarden van x. We noteren met $\mathrm{Ai}^{(k)}$ de $k$de afgeleide van de Airyfunctie. Al deze afgeleiden bestaan en gaan naar 0 op oneindig.

Opdracht 2 Er zijn heel wat bijzondere eigenschappen bekend van de Airyfunctie. De Airyfunctie treedt ook op in heel wat fysische toepassingen, zoals bv. beschreven in het document
`www.ulb.ac.be/di/mcs/louchard/louchard.papers/banderier-louchard.pdf`

(a) Zoek twee eigenschappen van de Airyfunctie op in de literatuur (in boeken of op internet) en vermeld deze als twee stellingen in uw LaTeX document.

Geef verwijzingen naar de literatuur en geef, indien mogelijk, ook een verwijzing naar het bewijs van de eigenschappen.

(b) Voeg een figuur toe in uw document met de grafiek van de Airyfunctie en eventueel ook de grafiek van de afgeleide van de Airyfunctie.

Voeg een tekst toe die duidelijk maakt wat we zien in de figuur. Geef ook een preciese verwijzing naar de plaats waar u de figuur gevonden heeft.

NB: Let er op dat het symbool Ai recht moet staan in uw LaTeX document, omdat het een speciale wiskundige functie betreft, zoals sin en cos. Als u `$Ai(x)$` gebruikt, dan krijgt u als uitvoer $Ai(x)$ waarbij Ai schuin staat. Dit zal als een LaTeX-fout aangerekend.

Definieer daarom in de preamble een commando `\Ai` om de Airyfunctie weer te geven en dat er voor zorgt dat Ai recht komt te staan.

4. Een determinant met Airyfuncties

De Airyfunctie is een functie die al heel lang bekend is. Toch wordt er nog actueel onderzoek rond gedaan.

In een recent proefschrift rond het numeriek benaderen van integralen komen zekere stelsels lineaire vergelijkingen voor waarvan de coëfficiënten uitgedrukt kunnen worden in de Airyfunctie en haar afgeleiden. Het oplosbaar zijn van het stelsel komt overeen met het niet-nul zijn van de determinant die essentieel de volgende $n \times n$ determinant is

$$D_n(x) = \det \left[\mathrm{Ai}^{(j+k-2)}(x)\right]_{j,k=1}^{n} . \qquad (5)$$

Voor $n = 0$ definiëren we $D_0(x) = 1$.

Uit (5) krijgen we bijvoorbeeld

$$D_1(x) = \mathrm{Ai}(x)$$
$$D_2(x) = \det \begin{bmatrix} \mathrm{Ai}(x) & \mathrm{Ai}'(x) \\ \mathrm{Ai}'(x) & \mathrm{Ai}''(x) \end{bmatrix} = \mathrm{Ai}(x)\,\mathrm{Ai}''(x) - \mathrm{Ai}'(x)^2,$$

enzovoorts. Door gebruik te maken van de differentiaalvergelijking (3) kunnen we D_2 ook schrijven als

$$D_2(x) = x\,\mathrm{Ai}(x)^2 - \mathrm{Ai}'(x)^2. \tag{6}$$

In het algemeen is $D_n(x)$ een ingewikkelde uitdrukking in $\mathrm{Ai}(x)$ en $\mathrm{Ai}'(x)$.

In het proefschrift wordt bewezen dat voor even waarden van n geldt dat $D_n(x) \neq 0$ voor reële waarden van x. Voor oneven waarden van n zijn er oneindig veel reële nulpunten die allemaal strikt negatief zijn. De volgende stelling geldt dus

Stelling 1 *Voor elke even $n \in \mathbb{N}$ geldt dat D_n geen reële nulpunten heeft.*

Opdracht 3 (a) Formuleer dit resultaat als een stelling in uw document. Definieer een stelling-omgeving en gebruik deze om de stelling te formuleren.

Ter inleiding van de stelling moet u de relevante definities geven zodat een lezer de formulering van de stelling kan begrijpen, ook een lezer die deze opdracht niet gezien zou hebben.

(b) Vervolgens wordt u gevraagd om het bewijs van de stelling te geven voor het geval dat $n = 2$.

U mag bij dit bewijs de eigenschappen van de Airyfunctie die vermeld zijn in paragraaf 2 zonder verder bewijs gebruiken. Om u verder op weg te helpen volgen hier de belangrijkste stappen in het bewijs.

- Ga uit van de uitdrukking (6) en bewijs dat
$$D_2'(x) = D_1(x)^2. \tag{7}$$
- U moet ook bewijzen dat
$$\lim_{x \to +\infty} D_2(x) = 0 \tag{8}$$
en dat D_2 niet identiek nul kan zijn op een interval van de vorm $[a, +\infty[$.

- Concludeer tenslotte dat $D_2(x) < 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$, en dat er bijgevolg geen reële nulpunten zijn.

Geef uw bewijs in eigen bewoordingen!

4. Bonusvraag

De volgende opdracht is een bonusvraag. U behaalt 20 op 20 als u Opdrachten 1, 2 en 3 foutloos maakt. Met de bonusvraag kunt u maximaal 10 extra punten verdienen.

Het bewijs voor algemene n maakt gebruik van een bijzondere identiteit die geldt voor de determinanten $D_n(x)$, namelijk

$$\left(\frac{D_{n+2}}{D_n}\right)' = (n+1)\left(\frac{D_{n+1}}{D_n}\right)^2. \tag{9}$$

Voor $n = 0$ komt deze identiteit neer op (7). Deze identiteit kunt u gebruiken in de opdracht.

U mag ook gebruiken dat het aantal nulpunten van $D_n(x)$ hooguit aftelbaar is, en dat

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{D_{n+2}(x)}{D_n(x)} = 0. \tag{10}$$

Opdracht 4 Bewijs Stelling 1 met volledige inductie, waarbij u dus (9) en (10) mag gebruiken. Vermeld deze eigenschappen wel expliciet als u ze gebruikt.

Omdat Opdracht 4 een bonusvraag is, wordt deze opdracht streng nagekeken. Uw oplossing moet in alle opzichten in orde zijn, anders trekken we punten af.

5. Vraag buiten categorie

De volgende opdracht valt buiten de toets, ook buiten de bonus. Ze is alleen bedoeld voor diegenen die zich hierdoor uitgedaagd zouden voelen.

Opdracht 5 Bewijs dat de identitiet (9) geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Hiermee zijn geen bonuspunten te verdienen. Als het u zou lukken om dit zelf te bewijzen, dan kunt u mede-auteur worden van een onderzoeksartikel. Besteedt er niet te veel tijd aan als het niet zou lukken....