LaTeX opdracht Bewijzen en Redeneren
Bachelor in Fysica en Wiskunde

- Werk de volgende opdracht **individueel** uit. U **moet** hier alleen aan werken. Geef ook geen files door aan anderen. Ingediende opdrachten die te zeer op elkaar lijken worden met 0 beoordeeld.
- Maak een `tex`-bestand met de naam `Achternaam-Voornaam.tex`. **Deze naamgeving is verplicht.** Compileer uw tekst naar een `pdf`-bestand, en mail zowel het `tex`- als het `pdf`-bestand door naar
  - Prof. Arno Kuijlaars (`arno.kuijlaars@kuleuven.be`) en
  - de monitor Dr. An Speelman (`an.speelman@kuleuven.be`).
- De LaTeX opdracht telt voor 2 punten mee (op 20) voor het examen van G0U13B Bewijzen en Redeneren (6sp) en voor 4 punten (op 20) voor het examen van G0U13C Bewijzen en Redeneren (3sp variant).
- Uiterste indiendatum is **zaterdag 16 november 2019** om 23:59 uur.

Let bij het gebruik van LaTeX zeker op de volgende punten. Hiermee zullen we bij de quotering rekening houden.

- Maak de kop van uw document met `\title` en `\author`. Vermeld bij `\author` ook uw studentennummer.
- Voorzie een aantal gecentreerde formules van een nummer. Zorg ervoor dat tenminste één keer naar een formule terugverwezen wordt. Gebuik de LaTeX commando's `\label` en `\ref` of `\eqref`.
- Maak een referentielijst waarin u de gebruikte literatuur vermeldt. Als u een resultaat uit de cursus gebruikt, vermeld dat dan en neem in dat geval de cursustekst op in de lijst van referenties. Verwijs naar de referenties met het commando `\cite`.
- Er is nog geen standaardmanier om naar webpagina's te verwijzen. Geef voldoende informatie om de lezer in staat te stellen de webpagina goed te kunnen terugvinden. Vermeld de auteur als die bekend is. Vermeld anders "Anoniem". Voorbeelden zijn

[1] T. Tao, A problem involving power series, Terry Tao home page 18 October 2016,
<terrytao.wordpress.com/2016/10/18/
a-problem-involving-power-series>
geraadpleegd op 10 november 2017.

[2] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, biography of Augustin Louis Cauchy in MacTutor History of Mathematics Archive,
<www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy.html>
geraadpleegd op 10 november 2017.

- Zorg ervoor dat uw tekst een op zichzelf staand document is dat gelezen kan worden door iemand die deze opdracht niet kent. Maak goede en volledige zinnen.

Belangrijk i.v.m. het vermijden van plagiaat U moet altijd naar de gebruikte bronnen verwijzen. Het moet ook steeds duidelijk zijn hoe u de bronnen gebruikt heeft.

Als u tekst letterlijk overneemt dan moet dat duidelijk gemaakt dat dit een letterlijke overname is. In veel gevallen wordt dit duidelijk gemaakt door de overgenomen tekst in een ander lettertype te zetten. Dit geldt ook voor een letterlijke vertaling.

Als u tekst letterlijk overneemt zonder dat er staat dat het een letterlijke overname is (enkel een verwijzing volstaat dan niet), dan beschouwen we dit als plagiaat.

Bij geconstateerd plagiaat wordt 5 punten (op 20) afgetrokken.

Als u zich laat inspireren door een tekst en er hier en daar elementen uitneemt, schrijf dan op waaruit u de informatie verkregen heeft. Schrijf dan een volledige zin zoals

- Ik heb me voor deze opdracht gebaseerd op de informatie die te vinden is in de referentie [1].

Neem deze zin op voordat de tekst komt en niet achteraf. Het enkel opnemen van het nummer [1] is niet voldoende.

Maar gebruik uw eigen woorden! Als u dezelfde zinswendingen gebruikt dan is het plagiaat.

Succes!

1. Georg Cantor

Georg Cantor was een Duits wiskundige die gewerkt heeft aan de grondslagen van de wiskunde. Hij heeft de basis gelegd voor de verzamelingenleer zoals we die nu kennen.

Opdracht 1. Geef een korte beschrijving van het leven en werk van Cantor. Informatie hierover is te vinden in boeken, artikels en op het internet. Gebruik minstens twee onafhankelijke bronnen en geef referenties naar de bronnen die u gebruikt. Zorg ervoor dat uw beschrijving niet meer dan 30 regels bedraagt.

2. De stelling van Cantor-Bernstein-Schröder

De stelling van Cantor-Bernstein-Schröder kan gebruikt worden om aan te tonen dat twee verzamelingen equipotent zijn.

Opdracht 2. (a) Formuleer en bespreek de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder. Gebruik zoveel mogelijk eigen bewoordingen.

[Let op dat u een gepaste LaTeX omgeving definieert en gebruikt om de stelling te formuleren.]

(b) Gebruik de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder om aan te tonen dat de verzameling $\mathbb{R}$ van alle reële getallen en het interval $[0, 1]$ equipotent zijn.

3. Kardinaliteit van $\mathbb{R}^3$

Een op het eerste gezicht verrassend resultaat is dat $\mathbb{R}^2$ equipotent is met $\mathbb{R}$. Dit zal in de bonusvraag hieronder aan bod komen.

Opdracht 3. Gebruik het resultaat dat $\mathbb{R}^2$ equipotent is met $\mathbb{R}$ om te bewijzen dat $\mathbb{R}^3$ equipotent is met $\mathbb{R}$.

Hint: Als $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een bijectie is, bewijs dat dan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x, y, z) = f(f(x, y), z) \qquad \text{voor } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

een bijectie is van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}$.

4. Bonusvraag: Kardinaliteit van $\mathbb{R}^2$

Deze bonusvraag gaat over de kardinaliteit van $\mathbb{R}^2$. We vragen ons af of $\mathbb{R}^2$ equipotent is met $\mathbb{R}$.

Omdat $\mathbb{R}$ equipotent is met $[0, 1]$ (zie opdracht 2) is een equivalente vraag of het vierkant $[0, 1] \times [0, 1]$ equipotent is met het lijnstuk $[0, 1]$.

Dit blijkt inderdaad zo te zijn en het is mogelijk om dit aan te tonen met de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder.

Het inzicht dat het vierkant equipotent is met het interval komt van Cantor, hoewel zijn oorspronkelijke bewijs niet correct was. Het lijkt tegenstrijdig omdat er beweerd wordt dat een 1-dimensionale verzameling (het interval) even groot is als een 2-dimensionale verzameling (het vierkant).

Opdracht 4. De opdracht is om een bewijs te vinden dat $[0, 1] \times [0, 1]$ equipotent is met $[0, 1]$ en vervolgens de stelling met het bewijs netjes en overzichtelijk op te schrijven, waarbij ook het idee van het bewijs goed uitgelegd wordt.

U kunt voor deze opdracht inspiratie vinden op verschillende webpagina's, discussiefora en documenten op het internet, bv.

`www-math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/m4010/infin2.pdf`

Let op dat niet alles wat online te vinden is ook correct is!

Omdat dit een bonusvraag is, wordt deze opdracht streng nagekeken. Uw oplossing moet in alle opzichten in orde zijn, anders verliest u punten voor deze bonusvraag. U kunt echter geen punten verliezen die u al behaalde voor Opdrachten 1, 2 en 3.

Geef zoals altijd goede verwijzingen naar de bronnen die u gebruikt.