Examen Analyse II

Leuven, 16 januari 2009

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

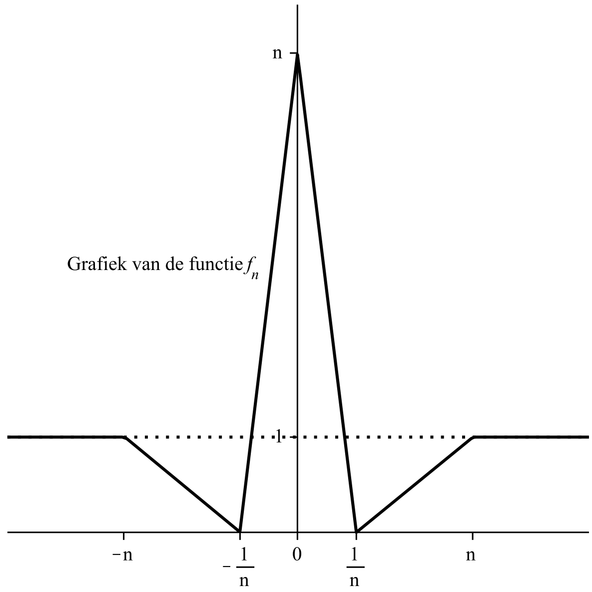
1. Definieer zoals hiernaast de functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Voor alle duidelijkheid: voor $x \leq -n$ en $x \geq n$, is $f(x) = 1$. Tussen $x = -n$ en $x = -\frac{1}{n}$ daalt de functie lineair van 1 naar 0. Tussen $x = -\frac{1}{n}$ en $x = 0$, stijgt de functie lineair van 0 naar n. Verder is $f(-x) = f(x)$.

   Bewijs dat

   $$\int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x)\, dx \to g(0)$$

   voor alle integreerbare functies $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die continu zijn in 0.



2. Bewijs de volgende veralgemening van het Lemma van Riemann-Lebesgue. Als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een continue, 2π-periodische functie is met $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\, dx = 0$, dan geldt voor alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dat

   $$\lim_{|\lambda| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(\lambda x)\, dx = 0 \; .$$

   Hint. Ga op dezelfde manier te werk als bij het bewijs van het Lemma van Riemann-Lebesgue. Dit wil zeggen dat je de eigenschap eerst bewijst wanneer f de indicatorfunctie van een interval $[a, b]$ is.

3. In welke punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is de functie

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) = \sin(x)\ \sqrt{|y|}$$

   totaal afleidbaar? Bewijs je antwoord nauwkeurig.

4. Als we met $e_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$ de standaard basisvectoren noteren, dan is $\|e_n\| = 1$ voor alle n, maar niettemin geldt voor alle $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dat

   $$\lim_{n \to +\infty} \langle e_n, a \rangle = 0 \; .$$

   a) Geef een voorbeeld van een rij vectoren in $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \lambda)$ met dezelfde eigenschappen.

   b) Zij H een Hilbertruimte en $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een orthonormale familie vectoren in H. Toon aan dat $\lim_{n \to \infty} \langle f_n, a \rangle = 0$ voor alle $a \in H$.

5. Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ gedefinieerd als

   $$\mathcal{O} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - z)^2 = 1 \;\; , \;\; 0 \leq y \leq 1\}$$

   en het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, -x(z + 1), 0)$.