Examen Analyse II
Tweede bachelor wiskunde
26 januari 2007

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- De groep die om 8 uur begint, blijft minstens tot 11 uur zitten (of tot de groep van 10 uur helemaal binnen is).
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. De Bètafunctie B is gedefinieerd als

$$B :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R} : B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \; .$$

De Gammafunctie Γ werd gedefinieerd in Oefening 2.25. Bewijs dat voor alle $x > 0$ geldt dat

$$\lim_{y\to+\infty} y^x B(x,y) = \Gamma(x) \; .$$

Hint. De verandering van veranderlijken $t \mapsto t/y$ zet je al een heel eind op weg.

2. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodische functie die integreerbaar is op $[0,2\pi]$. Noteer met $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ de Fouriercoëfficiënten van f.

   a) Toon aan dat

$$\sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_{n,m}(y)\, dy \quad \text{met} \quad D_{n,m}(y) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})y} - e^{-i(m+\frac{1}{2})y}}{4\pi i \sin\left(\frac{y}{2}\right)} \; .$$

   b) Veronderstel dat $x \in \mathbb{R}$ en dat f in het punt x een linker- en een rechterafgeleide heeft. Bewijs dat

$$\lim_{n,m\to+\infty} \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \; .$$

   Je hoeft geen gedetailleerd bewijs te geven, maar wel uit te leggen waarom dezelfde bewijsmethode als die voor de Stelling van Dirichlet, blijft werken.

3. Beschouw de Hilbertruimte $H = \mathrm{L}^2([0,1],\lambda)$ met vectoren e, f, h gedefinieerd als

$$e(t) = 1 \; , \quad f(t) = t \quad \text{en} \quad h(t) = t^2 \; .$$

Definieer $K = \mathrm{span}\{e,f\}$ en noteer met p_K de orthogonale projectie op K. Bereken $p_K(h)$.

4. Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ is de functie

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t^\alpha}$$

integreerbaar?

5. Verifieer de divergentiestelling voor het volume K en het vectorveld $\mathbf{V}$ gegeven door

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq (1-z)^2 \; , \; 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (0,0,1+z)$$