Examen Analyse II

Leuven, 26 januari 2009

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Zij $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ en zij $g : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ een meetbare functie zodat $y \mapsto \frac{1}{y}g(y)$ integreerbaar is.

   a) Bewijs dat voor bijna alle $x \in \mathbb{R}$, de uitdrukking

   $$(f \boxtimes g)(x) := \int_0^{+\infty} f(xy)g(y)\, dy$$

   goed gedefinieerd is en dat de resulterende functie $f \boxtimes g$ integreerbaar is.

   b) Bewijs dat $(f \boxtimes g)\widehat{\ } = \widehat{f} \boxtimes \widetilde{g}$ waarbij $\widetilde{g}(y) = \frac{1}{y}g\big(\frac{1}{y}\big)$.

2. Zij $1 < p < +\infty$ en beschouw de vectoren $\delta_n \in \ell^p(\mathbb{N})$ gegeven door

   $$\delta_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = m, \\ 0 & \text{als } n \neq m. \end{cases}$$

   a) Bewijs dat $\omega(\delta_n) \to 0$ voor elke continue lineaire afbeelding $\omega : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$.

   b) Toon aan dat deze eigenschap niet langer geldt wanneer $p = 1$.

3. We zeggen dat een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in het punt $x \in \mathbb{R}$ *rechts Lipschitz-continu* is als $f(x+)$ bestaat en als er getallen $\delta, M > 0$ bestaan zodanig dat

   $$|f(x + y) - f(x+)| \leq My \quad \text{voor alle } \ 0 < y < \delta \ .$$

   Analoog definiëren we het begrip *linkse Lipschitz-continuïteit.* Bewijs dat de Stelling van Dirichlet (Stelling 4.8) nog steeds geldt als we de voorwaarde *'f is links- en rechts-afleidbaar in x'* vervangen door de voorwaarde *'f is links en rechts Lipschitz-continu in x'.* Je hoeft alleen aan te geven hoe het bewijs van de Stelling van Dirichlet aangepast moet worden.

4. Zij $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ en $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ twee lineaire afbeeldingen. Definieer

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n : f(x, y) = A(x + \cos(y), y + \omega(x, y)) \ .$$

   Bewijs dat f totaal afleidbaar is en geef een formule voor df.

5. Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ gedefinieerd als

   $$\mathcal{O} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (yz)^2 = z^2 \ \ , \ \ 1 \leq z \leq 2\}$$

   en het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, x, 0)$.