Examen Analyse II
9 juni 2008

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.
Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Toon nauwkeurig aan dat de vectorruimte $C([0,1],\mathbb{C})$ van continue functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{C}$, uitgerust met de norm
$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx\ ,$$
geen Banachruimte is.

2. Zij $f,g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Bewijs nauwkeurig dat $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

3. Stel dat we voor elke $a \in [0,1]$ beschikken over een totaal afleidbare functie $\varphi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Maak daarenboven de volgende veronderstellingen.
   - Voor elke $y \in \mathbb{R}^n$ is de functie $a \mapsto \varphi_a(y)$ integreerbaar op het interval $[0,1]$.
   - Er bestaat een constante $M > 0$ zodat $\|(d\varphi_a)(y)\| \leq M$ voor alle $a \in [0,1]$ en alle $y \in \mathbb{R}^n$.

   Bewijs dat de functie
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f(y) = \int_0^1 \varphi_a(y)\,da$$
totaal afleidbaar is en dat de totale afgeleide voldoet aan
$$(df)(y)(v) = \int_0^1 (d\varphi_a)(y)(v)\,da \quad \text{voor alle } \ y,v \in \mathbb{R}^n\ .$$
Hint. Gebruik Lemma 1.22 en laat je inspireren door Propositie 2.60.

4. Zij $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Toon eerst aan dat de functie $[0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(1-x)x^n$ integreerbaar is. Laat je vervolgens inspireren door de berekening bovenaan pagina 57 om *heel nauwkeurig* te bewijzen dat
$$\int_{[0,1)} \ln(1-x)x^n\,dx = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\ .$$

5. Verifieer de divergentiestelling voor het volume K gegeven door
$$K = \{(x,y,z) \mid -\pi/2 \leq z \leq \pi/2\ ,\ x^2+y^2 \leq \cos^2 z\}$$
en het vectorveld $\mathbf{V}(x,y,z) = (0, y+z, 0)$.